

УДК 629.113

И.С. САЗОНОВ, В.А. КИМ, доктора техн. наук;
 Ки-Йонг ЧОЙ, О.В. БИЛЫК, А.С. МЕЛЬНИКОВ, кандидаты техн. наук;
 С.Ю. БИЛЫК

Белорусско-Российский университет, г. Могилев, Республика Беларусь

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТОРМОЖЕНИЯ АВТОМОБИЛЯ С УЧЕТОМ УПРУГО-ДИССИПАТИВНЫХ СВЯЗЕЙ

В работе представлена математическая модель процесса торможения автомобиля с пятью степенями свободы с заданными законами изменения тормозных моментов, формируемых водителем в колесных тормозных механизмах, а также учитывающая упруго-диссипативные связи подвесок. Получены формулы, позволяющие исследовать переходные процессы торможения автомобиля, установить взаимосвязь между параметрами процесса торможения автомобиля, массо-геометрическими характеристиками машины и законами формирования тормозных моментов в колесных тормозах.

Ключевые слова: процесс торможения, дифференциальные уравнения, формируемый момент, частота собственных колебаний, общее решение дифференциального уравнения

Введение. Торможение автомобиля сопровождается сложными физическими процессами, происходящими в контакте его колес с опорной поверхностью. При этом важной составляющей этого процесса являются изменения нормальных реакций опорной поверхности колес, вызванные инерционными силами поступательного и вращательного движений масс машины, условиями сцепления колес с опорной поверхностью и характеристиками привода колесных тормозов. Изменения нормальных реакций опорной поверхности колес и закон формирования тормозных моментов в колесных тормозах оказывают существенное влияние на показатели эффективности торможения автомобиля.

В классической теории торможения автомобиля принято, что показатели эффективности торможения — ускорение, путь и время — зависят только от коэффициентов сцепления колес с опорной поверхностью, начальной скорости торможения автомобиля и не зависят от массо-геометрических параметров, упруго-диссипативных характеристик подвесок и закона изменения тормозных моментов в колесных тормозах. Кроме того, в классической теории торможения автомобиля рассматривают только поступательное движение автомобиля при торможении, чаще всего предельное торможение (торможение с полной блокировкой колес). По существу рассматривается модель торможения автомобиля с одной степенью свободы. В результате чего считают, что ускорение замедления, скорость и путь торможения не зависят от массо-геометрических параметров автомобиля, характеристик подвески и закона изменения тормозных моментов, формируемых в колесных тормозах. Кроме того, указанные недостатки существующих моделей торможения автомобиля не позволяют производить оценку относительного скольжения контактов колес относительно опорной поверхности.

Методика, позволяющая оценку относительного скольжения контактов колес на стадии проектирования автомобиля, позволила бы выбор оптимальных параметров машины, обеспечивающих его устойчивость при торможении.

В настоящей работе поставлена цель — установить взаимосвязь между массо-геометрическими, упруго-диссипативными характеристиками подвесок автомобиля, коэффициентами сцеплений колес и параметрами про-

цесса торможения автомобиля с учетом законов изменений моментов, формируемых в колесных тормозах путем разработки математической модели с пятью степенями свободы.

Методика составления математической модели и решение дифференциальных уравнений движений масс автомобиля. Расчетная схема динамики торможения автомобиля с учетом упруго-диссипативных связей представлена на рисунке 1.

Данная схема описывается следующими обобщенными координатами: x_c, y_c, z_c — координаты линейного перемещения центра масс автомобиля; φ — угловая координата остова автомобиля в продольной плоскости; $\varphi_{к1}, \varphi_{к2}$ — угловые координаты вращения переднего и заднего колес автомобиля.

Приведенные коэффициенты жесткости упругих элементов передней и задней подвесок автомобиля c_1 и c_2 рассчитываются по формулам:

$$c_1 = \frac{c_{n1} \cdot c_{m1}}{c_{n1} + c_{m1}}; c_2 = \frac{c_{n2} \cdot c_{m2}}{c_{n2} + c_{m2}}; c_z = c_1 + c_2,$$

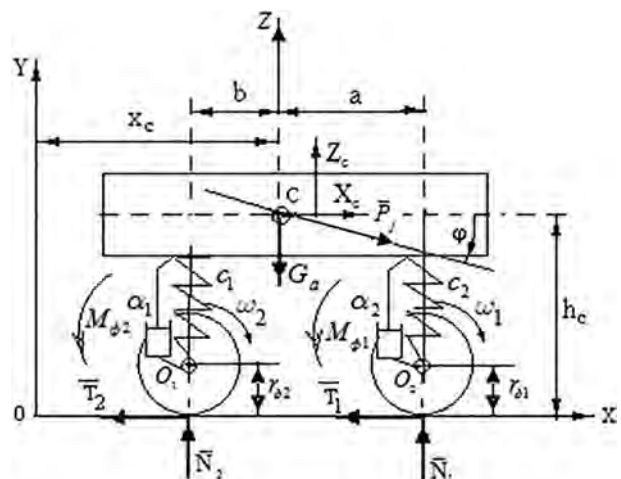


Рисунок 1 — Расчетная схема процесса торможения автомобиля с упруго-диссипативными связями: c_1, c_2 — приведенные коэффициенты жесткости упругих элементов, н/м;

φ — угол поворота остова автомобиля, рад; $m_a = \frac{G_a}{g}$ — масса

автомобиля, кг; a, b — геометрические параметры, м

где $c_{n1}, c_{ш1}, c_{n2}, c_{ш2}$ — коэффициенты жесткости подвесок и шин, Н/М; a_1, a_2 — коэффициенты вязкого сопротивления амортизаторов, Н·с/М.

Для составления дифференциальных уравнений движения масс автомобиля воспользуемся уравнением Лагранжа второго рода, исключая реакции связей между взаимодействующими телами:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_{qi} - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i}, \quad (1)$$

где Q_{qi} — обобщенные силы по заданным обобщенным координатам; T — кинетическая энергия системы; Π — потенциальная энергия системы; Φ — диссипативная функция; q_i, \dot{q}_i — обобщенные координаты и скорости.

Кинетическая энергия масс автомобиля равна:

$$T = \frac{1}{2} (m_a \cdot \dot{x}_c^2 + m_a \cdot \dot{y}_c^2 + m_a \cdot \dot{z}_c^2 + J_{к1} \cdot \dot{\varphi}_{к1}^2 + J_{к2} \cdot \dot{\varphi}_{к2}^2 + J_c \cdot \dot{\varphi}^2),$$

где J_c — момент инерции корпуса автомобиля относительно оси, проходящей через его центр масс (ось y); $J_{к1}, J_{к2}$ — моменты инерции колес относительно их центра масс его центр (ось y); $\dot{\varphi}$ — угловая скорость вращения корпуса автомобиля в продольной плоскости; $\dot{\varphi}_{к1}, \dot{\varphi}_{к2}$ — угловые скорости вращения колес автомобиля.

Потенциальная энергия упругих элементов автомобиля равна:

$$\Pi = \frac{c_1 \cdot (a \cdot \varphi^1 + z_c)^2}{2} + \frac{c_2 \cdot (b \cdot \varphi^1 - z_c)^2}{2} + \frac{c_z \cdot z_c^2}{2}.$$

Диссипативная функция равна:

$$\Phi = \frac{\alpha_1 \cdot (a \cdot \dot{\varphi} + \dot{z}_c)^2}{2} + \frac{\alpha_2 \cdot (b \cdot \dot{\varphi} + \dot{z}_c)^2}{2},$$

где α_1 и α_2 — коэффициенты вязкого сопротивления диссипативных элементов подвесок автомобиля, $\frac{Н \cdot с}{М}$.

Обобщенная сила по координате φ равна:

$$Q_\varphi = (T_1 + T_2) \cdot h_c,$$

где h_c — координата центра масс корпуса автомобиля, относительно горизонтальной опорной поверхности, T_1 и T_2 — тормозные силы, возникающие в контакте колес с опорной поверхностью и зависящие от формируемых моментов в колесных тормозах автомобиля.

Компоненты дифференциального уравнения по координате угла поворота остова автомобиля φ :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = J_c \cdot \ddot{\varphi}; \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = (c_1 \cdot a^2 + c_2 \cdot b^2) \cdot \varphi;$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\varphi}} = (\alpha_1 \cdot a^2 + \alpha_2 \cdot b^2) \cdot \dot{\varphi}.$$

Положим, что изменения моментов, формируемых в колесных тормозах автомобиля, происходят по заданным законам:

$$\begin{cases} M_1 = \frac{G_0 \cdot b \cdot \varphi_{сш1} \cdot r_{л1}}{(a+b) \cdot \tau_{н1}} \cdot t; \\ M_2 = \frac{G_0 \cdot a \cdot \varphi_{сш2} \cdot r_{л2}}{(a+b) \cdot \tau_{н2}} \cdot t, \end{cases} \quad (2)$$

где G_0 — вес автомобиля; a, b — расстояния от центра масс автомобиля до передней и задней осей колес; $\tau_{н1}, \tau_{н2}$ — времена достижения максимальных моментов в колесных тормозах; $\varphi_{сш1}, \varphi_{сш2}$ — коэффициенты сцеплений

колес передней и задней оси автомобиля; $r_{л1}, r_{л2}$ — динамические радиусы качения колес передней и задней осей; t — текущее время, с.

Тормозные силы в контакте колес с опорной поверхностью при торможении:

$$\begin{cases} T_1 = \frac{G_a \cdot b \cdot \varphi_{сш1}}{(a+b) \cdot \tau_{н1}} \cdot t; \\ T_2 = \frac{G_a \cdot a \cdot \varphi_{сш2}}{(a+b) \cdot \tau_{н2}} \cdot t. \end{cases} \quad (3)$$

Дифференциальное уравнение вращательного движения корпуса автомобиля при нарастании тормозных моментов в колесных тормозах (первый этап) имеет вид:

$$\ddot{\varphi}^1 + \frac{1}{J_c} (\alpha_1 \cdot a^2 + \alpha_2 \cdot b^2) \cdot \dot{\varphi}^1 + \frac{1}{J_c} (c_1 \cdot a^2 + c_2 \cdot b^2) \cdot \varphi^1 = \left(\frac{b \cdot \varphi_{сш1}}{\tau_{н1}} + \frac{a \cdot \varphi_{сш2}}{\tau_{н2}} \right) \cdot \frac{G_a \cdot h_c \cdot t}{(a+b)}.$$

Обобщенная сила по координате φ_1 на первом этапе торможения автомобиля равна:

$$A_{\varphi_1} = \left(\frac{b \cdot \varphi_{сш1}}{\tau_{н1}} + \frac{a \cdot \varphi_{сш2}}{\tau_{н2}} \right) \cdot \frac{G_a \cdot h_c \cdot t}{(a+b)}.$$

Введем обозначения в уравнение (4):

$$\begin{cases} 2 \cdot n = \frac{1}{J_c} \cdot (\alpha_1 \cdot a^2 + \alpha_2 \cdot b^2); \\ k^2 = \frac{1}{J_c} \cdot (c_1 \cdot a^2 + c_2 \cdot b^2); \\ A_{\varphi_1} = \left(\frac{b \cdot \varphi_{сш1}}{\tau_{н1}} + \frac{a \cdot \varphi_{сш2}}{\tau_{н2}} \right) \cdot \frac{G_a \cdot h_c \cdot t}{(a+b)}. \end{cases} \quad (6)$$

Тогда уравнение (4) с учетом (6) запишется в виде:

$$\ddot{\varphi}^1 + 2n \cdot \dot{\varphi}^1 + k^2 \cdot \varphi^1 = A_{\varphi_1} \cdot t, \quad (7)$$

где $k = \sqrt{\frac{c_1 \cdot a^2 + c_2 \cdot b^2}{J_c}}$ — собственная частота угловых колебаний кузова автомобиля.

Рассмотрим однородное уравнение

$$\ddot{\varphi} + 2n \cdot \dot{\varphi} + k^2 \cdot \varphi = 0. \quad (8)$$

Решение однородного уравнения (8) зависит от корней его характеристического уравнения.

Запишем характеристическое уравнение однородного дифференциального уравнения (8)

$$\lambda^2 + 2 \cdot n \cdot \lambda + k^2 = 0. \quad (9)$$

Случай $n < k$ — затухающие угловые колебания остова кузова автомобиля. Корни характеристического уравнения (9) комплексные и разные:

$$\lambda_{1,2} = -n \pm i \cdot \sqrt{k^2 - n^2}. \quad (10)$$

Общее решение однородного дифференциального уравнения (8) представится в виде:

$$\varphi_{н>к}^* = e^{-nt} \cdot (C_1 \cdot \sin \sqrt{k^2 - n^2} \cdot t + C_2 \cdot \cos \sqrt{k^2 - n^2} \cdot t). \quad (11)$$

Частное решение дифференциального уравнения (7) представим в виде:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = D \cdot t + D_1; \\ \varphi = D \cdot t^2 + D_1 \cdot t + D_2. \end{cases} \quad (12)$$

Подставив выражение (12) в уравнение (7), получим

$$2 \cdot n \cdot D + k^2 (D \cdot t + D_1) = A \cdot t. \quad (13)$$



Откуда имеем:

$$\begin{cases} 2 \cdot n \cdot D + k^2 \cdot D_1 = 0; \\ k^2 \cdot D \cdot t = A. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} D = \frac{A_{\varphi_1}}{k^2}; \\ D_1 = -2 \cdot n \cdot \frac{A_{\varphi_1}}{k^4}. \end{cases} \quad (14)$$

С учетом уравнения (14) частное решение $\bar{\varphi}$ уравнения (7) находится в виде:

$$\bar{\varphi} = \frac{A_{\varphi_1}}{k^2} \cdot t - 2 \cdot n \cdot \frac{A_{\varphi_1}}{k^4}. \quad (15)$$

С учетом полученных выражений общее решение неоднородного дифференциального уравнения (7) при $n < k$ запишется в виде:

$$\varphi_{n < k}^{\text{общ}} = \varphi_{n < k}^* + \bar{\varphi}_{n < k}, \quad (16)$$

где $\varphi_{n < k}^*$ — решение однородного уравнения; $\bar{\varphi}_{n < k}$ — частное решение уравнения.

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения (7) имеет вид:

$$\begin{cases} \varphi_{n < k}^{\text{общ}} = e^{-nt} \cdot (C_1 \cdot \sin \sqrt{k^2 - n^2} \cdot t + \\ + C_2 \cdot \cos \sqrt{k^2 - n^2} \cdot t) + \frac{A_{\varphi_1}}{k^2} \cdot t - 2 \cdot n \cdot \frac{A_{\varphi_1}}{k^4}; \\ \varphi_{n < k}^{\text{общ}} = (-n_1 \cdot \sin \sqrt{k^2 - n^2} \cdot t + \\ + \sqrt{k^2 - n^2} \cos \sqrt{k^2 - n^2} \cdot t) \cdot e^{-nt} \cdot C_1 - \\ - (n \cdot \cos \sqrt{k^2 - n^2} \cdot t + \sqrt{k^2 - n^2} \sin \times \\ \times \sqrt{k^2 - n^2} \cdot t) \cdot e^{-nt} C_2 + \frac{A_{\varphi_1}}{k^2}. \end{cases} \quad (17)$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 , C_2 принимаем начальные условия: $t = 0$; $\varphi_{t=0} = 0$; $\dot{\varphi}_{t=0} = 0$.

С учетом начальных условий получим формулы для определения начальных условий:

$$\begin{cases} C_1 = \left((t - 2 \cdot n) \cdot n - \frac{1}{k^2} \right) \frac{A_{\varphi_1}}{k^2 \cdot \sqrt{k^2 - n^2}}; \\ C_2 = \frac{A}{k^2} \cdot t - 2 \cdot n \cdot \frac{A}{k^4}. \end{cases} \quad (18)$$

Кинематические параметры, относящиеся к моменту времени $t = \tau_{н1}$ (начало блокировки колес передней оси), являются начальными условиями второго этапа торможения автомобиля, представляющего момент блокировки колес передней оси:

$$\begin{cases} \varphi_{n < k, \tau_{н1}}^{\text{общ}} = e^{-n \tau_{н1}} \cdot (C_1 \cdot \sin \sqrt{k^2 - n^2} \cdot \tau_{н1} + \\ + C_2 \cdot \cos \sqrt{k^2 - n^2} \cdot \tau_{н1}) + \frac{A_{\varphi_1}}{k^2} \cdot \tau_{н1} - 2 \cdot n \cdot \frac{A_{\varphi_1}}{k^4}; \\ \dot{\varphi}_{n < k, \tau_{н1}}^{\text{общ}} = (-n_1 \cdot \sin \sqrt{k^2 - n^2} \cdot \tau_{н1} + \\ + \sqrt{k^2 - n^2} \cos \sqrt{k^2 - n^2} \cdot \tau_{н1}) \cdot e^{-n \tau_{н1}} \cdot C_1 - \\ - (n \cdot \cos \sqrt{k^2 - n^2} \cdot \tau_{н1} + \sqrt{k^2 - n^2} \times \\ \times \sin \sqrt{k^2 - n^2} \cdot \tau_{н1}) \cdot e^{-n \tau_{н1}} C_2 + \frac{A_{\varphi_1}}{k^2}. \end{cases} \quad (19)$$

Дифференциальное уравнение угла поворота остова автомобиля на втором этапе торможения (торможение с блокировкой колес передней оси):

$$\ddot{\varphi}^{\text{II}} + 2n \cdot \dot{\varphi}^{\text{II}} + k^2 \cdot \varphi^{\text{II}} = A_{\varphi_{\text{II}}} \cdot t, \quad (20)$$

где

$$A_{\varphi_{\text{II}}} = \left(b \cdot \varphi_{\text{сц1}} + \frac{a \cdot \varphi_{\text{сц2}} \cdot t}{\tau_{н2}} \right) \cdot \frac{G_a \cdot h_c}{(a+b)}.$$

Общее решение однородного уравнения при $k < n$ имеет вид:

$$\varphi_{n < k}^* = e^{-nt} \cdot (C_1 \cdot \sin \sqrt{k^2 - n^2} \cdot t + C_2 \cdot \cos \sqrt{k^2 - n^2} \cdot t). \quad (21)$$

Частное решение дифференциального уравнения (20) представим в виде:

$$\begin{cases} \bar{\varphi}_{\tau_{н}} = D_{\tau_{н}} \cdot t + D_{1\tau_{н}}; \\ \bar{\varphi}'_{\tau_{н}} = D_{\tau_{н}}. \end{cases} \quad (22)$$

Подставим выражение (22) в уравнение (20) и получим:

$$\begin{cases} D_{1\tau_{н}} = b \cdot \varphi_{\text{сц1}} \cdot \frac{G_a \cdot h_c}{(2 \cdot n + k^2) \cdot (a+b)}; \\ D_{\tau_{н}} = \frac{a \cdot \varphi_{\text{сц2}}}{k^2 \cdot \tau_{н2}} \cdot \frac{G_a \cdot h_c}{(a+b)}. \end{cases} \quad (23)$$

С учетом (23) частное решение $\bar{\varphi}$ запишется в виде:

$$\bar{\varphi}_{\tau_{н1}}^{\text{II}} = b \cdot \varphi_{\text{сц1}} \cdot \frac{G_a \cdot h_c}{(2 \cdot n + k^2) \cdot (a+b)} \cdot t + \frac{a \cdot \varphi_{\text{сц2}}}{k^2 \cdot \tau_{н2}} \cdot \frac{G_a \cdot h_c}{(a+b)}. \quad (24)$$

С учетом начальных условий (19) находим:

$$\begin{cases} C_{1\tau_{н1}} = \left[\dot{\varphi}_{n < k, \tau_{н1}}^{\text{II, общ}} + n \cdot \left(\varphi_{n < k, \tau_{н1}}^{\text{II, общ}} - \frac{a \cdot \varphi_{\text{сц2}}}{k^2 \cdot \tau_{н2}} \cdot \frac{G_a \cdot h_c}{a+b} \right) - \right. \\ \left. - \frac{b \cdot \varphi_{\text{сц1}}}{2 \cdot n + k^2} \cdot \frac{G_a \cdot h_c}{a+b} \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{k^2 - n^2}}; \\ C_{2\tau_{н1}} = \varphi_{n < k, \tau_{н1}}^{\text{II, общ}} - \frac{a \cdot \varphi_{\text{сц2}}}{k^2 \cdot \tau_{н2}} \cdot \frac{G_a \cdot h_c}{a+b}. \end{cases} \quad (25)$$

Общее решение уравнения (20), описывающее вращение корпуса автомобиля на втором этапе торможения, запишется в виде:

$$\begin{cases} \varphi_{n < k}^{\text{общ, II}} = e^{-nt} \cdot (C_{1\tau_{н1}} \cdot \sin \sqrt{k^2 - n^2} \cdot t + \\ + C_{2\tau_{н1}} \cdot \cos \sqrt{k^2 - n^2} \cdot t) + \frac{A_{\varphi_{\text{II}}}}{k^2} \cdot t - 2 \cdot n \cdot \frac{A_{\varphi_{\text{II}}}}{k^4}; \\ \dot{\varphi}_{n < k}^{\text{общ, II}} = (\sqrt{k^2 - n^2} \cdot \cos \sqrt{k^2 - n^2} \cdot t - \\ - n \cdot \sin \sqrt{k^2 - n^2} \cdot t) \cdot e^{-nt} \cdot C_{1\tau_{н1}} - (n \cdot \cos \sqrt{k^2 - n^2} \cdot t - \\ - \sqrt{k^2 - n^2} \cdot \sin \sqrt{k^2 - n^2} \cdot t) \cdot e^{-nt} C_{2\tau_{н1}} + \frac{A_{\varphi_{\text{II}}}}{k^2}. \end{cases} \quad (26)$$

Уравнения угла поворота и угловой скорости корпуса автомобиля в момент времени $\tau_{н2}$ (блокировка задних колес автомобиля) являются начальными условиями третьего этапа торможения:

$$\begin{cases} \varphi_{n < k, \tau_{н2}}^{\text{общ, II}} = e^{-n \tau_{н2}} \cdot (C_{1\tau_{н1}} \cdot \sin \sqrt{k^2 - n^2} \cdot \tau_{н2} + \\ + C_{2\tau_{н1}} \cdot \cos \sqrt{k^2 - n^2} \cdot \tau_{н2}) + \frac{A_{\varphi_{\text{II}}}}{k^2} \cdot \tau_{н2} - 2 \cdot n \cdot \frac{A_{\varphi_{\text{II}}}}{k^4}; \\ \dot{\varphi}_{n < k, \tau_{н2}}^{\text{общ, II}} = (\sqrt{k^2 - n^2} \cdot \cos \sqrt{k^2 - n^2} \cdot \tau_{н2} - \\ - n \cdot \sin \sqrt{k^2 - n^2} \cdot \tau_{н2}) \cdot e^{-n \tau_{н2}} \cdot C_{1\tau_{н1}} - (n \cdot \cos \sqrt{k^2 - n^2} \cdot \tau_{н2} - \\ - \sqrt{k^2 - n^2} \cdot \sin \sqrt{k^2 - n^2} \cdot \tau_{н2}) \cdot e^{-n \tau_{н2}} \cdot C_{2\tau_{н1}} + \frac{A_{\varphi_{\text{II}}}}{k^2}. \end{cases} \quad (27)$$



Дифференциальное уравнение изменения угла поворота остова автомобиля третьего этапа торможения (полная блокировка колес передней оси автомобиля). Запишем дифференциальное уравнение вращения корпуса автомобиля для третьего этапа торможения (блокировка всех колес автомобиля).

Обобщенная сила по координате φ_k^{III} равна:

$$A_{\varphi_{III}} = (b \cdot \varphi_{сн1} + a \cdot \varphi_{сн2}) \cdot \frac{G_a \cdot h_c}{(a+b)}. \quad (28)$$

Дифференциальное уравнение, описывающее вращение корпуса автомобиля ($n < k$) при торможении с полной блокировкой колес запишется в виде:

$$\ddot{\varphi}_{n<k}^{III} + 2n \cdot \dot{\varphi}_{n<k}^{III} + k^2 \cdot \varphi_{n<k}^{III} = A_{\varphi_{III}}. \quad (29)$$

Частное решение дифференциального уравнения (20) представим в виде:

$$\begin{cases} \bar{\varphi}_{\tau_{n,III}} = D_{III, \tau_{n,III}}; \\ \bar{\varphi}'_{\tau_{n,III}} = 0. \end{cases} \quad (30)$$

Подставив (30) в (29), получим:

$$D_{III, \tau_{n,III}} = \frac{A_{\varphi_{III}}}{k^2}. \quad (31)$$

Тогда частное решение дифференциального уравнения (29) равно:

$$\bar{\varphi}_{\tau_{n,III}} = \frac{A_{\varphi_{III}}}{k^2}. \quad (32)$$

Общее решение дифференциального уравнения (29) на третьем этапе торможения имеет вид:

$$\begin{cases} \varphi_{n<k}^{общ,III} = e^{(-n-\sqrt{n^2-k^2})t} \cdot C_1^{III} + e^{(-n+\sqrt{n^2-k^2})t} \cdot C_2^{III} + \bar{\varphi}_{\tau_{n,III}}; \\ \dot{\varphi}_{n<k}^{общ,III} = (-n-\sqrt{n^2-k^2}) \cdot e^{(-n-\sqrt{n^2-k^2})t} \cdot C_1^{III} + \\ + (-n+\sqrt{n^2-k^2}) \cdot e^{(-n+\sqrt{n^2-k^2})t} \cdot C_2^{III}. \end{cases} \quad (33)$$

При начальных условиях: $t = 0$ и уравнения $\varphi_{n<k,t=0}^{общ} = 0$; $\dot{\varphi}_{n<k,t=0}^{общ} = 0$ определим постоянные интегрирования C_1^{III} , C_2^{III} :

$$\begin{cases} \varphi_{n<k}^{общ,III} = C_1^{III} + C_2^{III} + \bar{\varphi}_{\tau_{n,III}}; \\ (n+\sqrt{n^2-k^2}) \cdot C_1^{III} = (-n+\sqrt{n^2-k^2}) \cdot C_2^{III} - \dot{\varphi}_{n<k}^{общ,III}. \end{cases} \quad (34)$$

Постоянные интегрирования уравнения (33) равны:

$$\begin{cases} C_2^{III} = \varphi_{n<k}^{общ,III} - \bar{\varphi}_{\tau_{n,III}} - \frac{n \cdot \bar{\varphi}_{\tau_{n,III}}}{2 \cdot \sqrt{n^2-k^2}} + \\ + \frac{\sqrt{n^2-k^2} (\varphi_{n<k, \tau_{n2}}^{общ,III} - \bar{\varphi}_{\tau_{n,III}}) - n \cdot \varphi_{n<k, \tau_{n2}}^{общ,III} - \dot{\varphi}_{n<k, \tau_{n2}}^{общ,III}}{2 \cdot \sqrt{n^2-k^2}}; \\ C_1^{III} = \frac{n \cdot \bar{\varphi}_{\tau_{n,III}} + \sqrt{n^2-k^2} (\varphi_{n<k, \tau_{n2}}^{общ,III} - \bar{\varphi}_{\tau_{n,III}}) - \\ - n \cdot \varphi_{n<k, \tau_{n2}}^{общ,III} - \dot{\varphi}_{n<k, \tau_{n2}}^{общ,III}}{2 \cdot \sqrt{n^2-k^2}}. \end{cases} \quad (35)$$

Формулы (33)–(35) позволяют исследовать переходные процессы торможения автомобиля на отрезке времени до установившегося торможения, происходящего при полной блокировке всех колес автомобиля.

Определим закон изменения нормальных реакций опорной поверхности колес при торможении автомобиля с учетом характеристик подвесок ($n < k$) и заданных законах

изменения моментов, формируемых в колесных тормозах на первом этапе торможения (колеса не заблокированы).

В общем случае нормальные реакции опорной поверхности колес автомобиля равны:

$$\begin{cases} N_{1д} = N_{ср1} + N_{\dot{x}} + N_{\dot{\varphi}} + N_{\dot{z}}; \\ N_{2д} = N_{ср2} - N_{\dot{x}} - N_{\dot{\varphi}} + N_{\dot{z}}, \end{cases} \quad (36)$$

где $N_{д1}$, $N_{д2}$ — нормальные реакции опорной поверхности колес передней и задней осей автомобиля.

Статические реакции опорной поверхности колес равны:

$$\begin{cases} N_{ср1} = \frac{G \cdot b}{a+b}; \\ N_{ср2} = \frac{G \cdot a}{a+b}, \end{cases} \quad (37)$$

где $N_{\dot{x}}$ — динамическая догрузка-разгрузка реакций опорной поверхности колес от сил инерции поступательного движения автомобиля.

Динамическая «дгрузка-разгрузка» осей автомобиля от сил инерции поступательного движения при торможении равна:

$$\begin{cases} N_{\dot{x}1} = \frac{G_a \cdot h_c}{(a+b)^2} \cdot \left(\frac{b \cdot \varphi_{сн1}}{\tau_{н1}} + \frac{a \cdot \varphi_{сн2}}{\tau_{н2}} \right) \cdot t; \\ N_{\dot{x}2} = -\frac{G_a \cdot h_c}{(a+b)^2} \cdot \left(\frac{b \cdot \varphi_{сн1}}{\tau_{н1}} + \frac{a \cdot \varphi_{сн2}}{\tau_{н2}} \right) \cdot t. \end{cases} \quad (38)$$

где $N_{\dot{\varphi}}$ — динамическая «дгрузка-разгрузка» осей автомобиля от сил инерции вращательного движения корпуса автомобиля:

$$\begin{cases} N_{\dot{\varphi}1} = c_1 \cdot a \cdot \varphi; \\ N_{\dot{\varphi}2} = -c_2 \cdot b \cdot \varphi. \end{cases} \quad (39)$$

где $N_{\dot{z}}$ — динамическая «дгрузка-разгрузка» опорных реакций колес за счет «осадки» кузова автомобиля вдоль оси Z определяется по формулам:

$$\begin{cases} N_{\dot{z}1} = \left(\frac{b \cdot \varphi_{сн1}}{\tau_{н1}} + \frac{a \cdot \varphi_{сн2}}{\tau_{н2}} \right) \frac{G}{(a+b)^2} \cdot b \cdot t \cdot \sin \varphi; \\ N_{\dot{z}2} = \left(\frac{b \cdot \varphi_{сн1}}{\tau_{н1}} + \frac{a \cdot \varphi_{сн2}}{\tau_{н2}} \right) \frac{G}{(a+b)^2} \cdot a \cdot t \cdot \sin \varphi. \end{cases} \quad (40)$$

С учетом (37)–(40) уравнение (36) запишется в виде:

$$\begin{cases} N_{1д} = \frac{G \cdot b}{a+b} + \frac{G_a \cdot h_c}{(a+b)^2} \cdot \left(\frac{b \cdot \varphi_{сн1}}{\tau_{н1}} + \frac{a \cdot \varphi_{сн2}}{\tau_{н2}} \right) \cdot t + c_1 \cdot a \cdot \varphi + \\ + \left(\frac{b \cdot \varphi_{сн1}}{\tau_{н1}} + \frac{a \cdot \varphi_{сн2}}{\tau_{н2}} \right) \frac{G}{(a+b)^2} \cdot b \cdot t \cdot \sin \varphi; \\ N_{2д} = \frac{G \cdot a}{a+b} - \frac{G_a \cdot h_c}{(a+b)^2} \cdot \left(\frac{b \cdot \varphi_{сн1}}{\tau_{н1}} + \frac{a \cdot \varphi_{сн2}}{\tau_{н2}} \right) \cdot t - c_2 \cdot b \cdot \varphi + \\ + \left(\frac{b \cdot \varphi_{сн1}}{\tau_{н1}} + \frac{a \cdot \varphi_{сн2}}{\tau_{н2}} \right) \frac{G}{(a+b)^2} \cdot a \cdot t \cdot \sin \varphi, \end{cases} \quad (41)$$

где φ — изменение угла поворота остова автомобиля на этапах торможения.

Уравнение (41) представляет собой формулы расчета нормальных реакций опорной поверхности колес автомобиля, позволяющие оценить возможности реализации заданных моментов, формируемых водителем в колесных тормозах ($n < k$).

Расчетные моменты на колесах автомобиля равны сумме всех составляющих моментов колес, реализующих



щих полную реакцию опорной поверхности колес с учетом догрузок, полученных от инерционных сил:

$$\begin{cases} M_{1д} = (N_{сr1} + N_{\dot{x}} + N_{\dot{\varphi}} + N_{\dot{z}}) \cdot \varphi_{сц1} \cdot r_{1д}; \\ M_{2д} = (N_{сr2} - N_{\dot{x}} - N_{\dot{\varphi}} + N_{\dot{z}}) \cdot \varphi_{сц1} \cdot r_{1д}. \end{cases} \quad (42)$$

С учетом догрузки колес только инерционной силой поступательного движения автомобиля при торможении расчетные моменты на колесах на первом этапе торможения равны:

$$\begin{cases} M_{1д} = \frac{G}{a+b} \cdot \left(b \cdot r_{д1} \cdot \varphi_{сц1} + \frac{h_c}{a+b} \cdot \left(\frac{b \cdot \varphi_{сц1}}{\tau_{н1}} + \frac{a \cdot \varphi_{сц2}}{\tau_{н2}} \right) \cdot r_{д1} \cdot \varphi_{сц1} \cdot t \right); \\ M_{2д} = \frac{G}{a+b} \cdot \left(a \cdot \varphi_{сц2} \cdot r_{д2} - \frac{h_c}{a+b} \cdot \left(\frac{b \cdot \varphi_{сц1}}{\tau_{н1}} + \frac{a \cdot \varphi_{сц2}}{\tau_{н2}} \right) \cdot \varphi_{сц2} \cdot r_{д2} \cdot t \right). \end{cases} \quad (43)$$

Методика определения коэффициентов относительного скольжения контактов колес автомобиля на первом этапе торможения (блокировка колес отсутствует).

Скорость поступательного движения автомобиля на первом этапе торможения без учета автомобиля:

$$\dot{x}_c^1 = -(b \cdot \varphi_{сц1} - a \cdot \varphi_{сц2}) \cdot \frac{g}{a+b} \cdot t + V_0, \quad (44)$$

где V_0 — скорость начала торможения автомобиля.

Линейные скорости геометрических центров переднего и заднего колес на первом этапе торможения автомобиля с учетом сил инерции поступательного движения равны:

$$\begin{cases} \dot{x}_{к1д} = -\frac{G_a}{2 \cdot J_{к1} \cdot (a+b)} \cdot \frac{b \cdot \varphi_{сц1}}{\tau_{н1}} \cdot r_{д1}^2 \cdot t^2 + V_0; \\ \dot{x}_{к2д} = -\frac{G_a}{2 \cdot J_{к2} \cdot (a+b)} \cdot \frac{a \cdot \varphi_{сц2}}{\tau_{н2}} \cdot r_{д2}^2 \cdot t^2 + V_0. \end{cases} \quad (45)$$

Линейные скорости геометрических центров переднего и заднего колес автомобиля в момент времени $t = \tau_{н1}$ (начало блокировки передних колес) с учетом сил инерции поступательного движения равны:

$$\begin{cases} \dot{x}_{к1,6л.1} = -\frac{G_a}{2 \cdot J_{к1} \cdot (a+b)} \cdot b \cdot \varphi_{сц1} \cdot r_{д1}^2 \cdot \tau_{н1} + V_0; \\ \dot{x}_{к2,6л.1} = -\frac{G_a}{2 \cdot J_{к2} \cdot (a+b)} \cdot \frac{a \cdot \varphi_{сц2}}{\tau_{н2}} \cdot r_{д2}^2 \cdot \tau_{н1}^2 + V_0. \end{cases} \quad (46)$$

Коэффициенты относительного скольжения контактов переднего и заднего колес с учетом их догрузок от сил инерции поступательного движения на отрезке времени $\tau_{н1}$ равны:

$$\begin{cases} \delta_{к1}^1 = \frac{\left[\left(\frac{m_a \cdot r_{д1}}{2 \cdot J_{к1} \cdot \tau_{н1}} \cdot t - 1 \right) \cdot b \cdot \varphi_{сц1} + a \cdot \varphi_{сц2} \right] \cdot g \cdot t}{V_0 - \frac{(b \cdot \varphi_{сц1} - a \cdot \varphi_{сц2}) \cdot g \cdot t}{(a+b)}} \cdot 100\%; \\ \delta_{к2с}^1 = \frac{\left[\left(\frac{m_a \cdot a}{2 \cdot J_{к2} \cdot \tau_{н2}} \cdot r_{д2} \cdot t + a \right) \cdot \varphi_{сц2} - b \cdot \varphi_{сц1} \right] \cdot t \cdot g}{V_0 - \frac{(b \cdot \varphi_{сц1} - a \cdot \varphi_{сц2}) \cdot g \cdot t}{(a+b)}} \cdot 100\%. \end{cases} \quad (47)$$

Расчетные моменты колесных тормозов с учетом инерционных сил, действующих на автомобиль, равны:

$$\begin{cases} M_{1д} = \frac{G \cdot b}{a+b} \cdot r_{д1} \cdot \varphi_{сц1} + \frac{G_a \cdot h_c}{(a+b)^2} \cdot \left(\frac{b \cdot \varphi_{сц1}}{\tau_{н1}} + \frac{a \cdot \varphi_{сц2}}{\tau_{н2}} \right) \cdot r_{д1} \cdot \varphi_{сц1} \cdot t + \\ + r_{д1} \cdot \varphi_{сц1} \cdot c_1 \cdot a \cdot \varphi + \left(\frac{b \cdot \varphi_{сц1}}{\tau_{н1}} + \frac{a \cdot \varphi_{сц2}}{\tau_{н2}} \right) \frac{G}{(a+b)^2} \cdot r_{д1} \cdot \varphi_{сц1} \cdot b \cdot t \cdot \sin \varphi; \\ M_{2д} = \frac{G \cdot a}{a+b} \cdot r_{д2} \cdot \varphi_{сц2} - \frac{G_a \cdot h_c}{(a+b)^2} \cdot \left(\frac{b \cdot \varphi_{сц1}}{\tau_{н1}} + \frac{a \cdot \varphi_{сц2}}{\tau_{н2}} \right) \cdot r_{д2} \cdot \varphi_{сц2} \cdot t - \\ - r_{д2} \cdot \varphi_{сц2} \cdot c_2 \cdot b \cdot \varphi + \left(\frac{b \cdot \varphi_{сц1}}{\tau_{н1}} + \frac{a \cdot \varphi_{сц2}}{\tau_{н2}} \right) \frac{G}{(a+b)^2} \cdot r_{д2} \cdot \varphi_{сц2} \cdot a \cdot t \cdot \sin \varphi. \end{cases} \quad (48)$$

Линейные скорости геометрических центров переднего и заднего колес на первом этапе торможения автомобиля с учетом всех инерционных сил равны:

$$\begin{cases} \dot{x}_{к1д}^1 = \left[b + \frac{b \cdot \sin \varphi_1}{2 \cdot (a+b)} \cdot t + \frac{h_c}{2 \cdot (a+b)} \cdot t \right] \cdot \left(\frac{b}{\tau_{н1}} + \frac{a \cdot \varphi_{сц2}}{\tau_{н2}} \right) \times \\ \times \frac{G_0}{a+b} \cdot r_{д1} \cdot \varphi_{сц1} + r_{д1} \cdot \varphi_{сц1} \cdot c_1 \cdot a \cdot \varphi_1 + V_0 \cdot \frac{t}{J_{1д}} + V_0; \\ \dot{x}_{к2д}^1 = \frac{t}{J_{1д}} \cdot \left[a - \frac{h_c}{2 \cdot (a+b)} \cdot t + \frac{a \cdot \sin \varphi_1}{2 \cdot (a+b)} \cdot t \right] \cdot \left(\frac{b \cdot \varphi_{сц1}}{\tau_{н1}} + \frac{a \cdot \varphi_{сц2}}{\tau_{н2}} \right) \times \\ \times \frac{G}{a+b} \cdot r_{д2} \cdot \varphi_{сц2} - r_{д2} \cdot \varphi_{сц2} \cdot c_2 \cdot b \cdot \varphi_1 + V_0. \end{cases} \quad (49)$$

Коэффициенты относительного скольжения контактов переднего и заднего колес с учетом их догрузок от всех сил инерции на отрезке времени $\tau_{н1}$ равны:

$$\begin{cases} \delta_{к1с}^1 = \frac{\dot{x}_c^1 - \dot{x}_{к1д}^1}{\dot{x}_c^1} \cdot 100\%; \\ \delta_{к2с}^1 = \frac{\dot{x}_c^1 - \dot{x}_{к2д}^1}{\dot{x}_c^1} \cdot 100\%. \end{cases} \quad (50)$$

Сравнение результатов расчета по формулам (46) и (50) позволит дать оценку устойчивости движения автомобиля на первом этапе торможения.

Методика определения коэффициентов относительного скольжения контактов колес автомобиля (блокировка колеса передней оси). Скорость поступательного движения автомобиля на первом этапе торможения без учета догрузок на его оси колес, возникающих вследствие возникновения инерционных сил во вращательном движении корпуса автомобиля (догрузки оси от сил инерции поступательного движения автомобиля учитываются):

$$\dot{x}_c^1 = -(b \cdot \varphi_{сц1} - a \cdot \varphi_{сц2}) \cdot \frac{g}{a+b} \cdot t + V_0, \quad (51)$$

где V_0 — скорость начала торможения автомобиля.

Линейные скорости геометрических центров переднего и заднего колес на первом этапе торможения автомобиля с учетом сил инерции поступательного движения равны:

$$\begin{cases} \dot{x}_{к1,6л.1} = \frac{G}{J_{к1} \cdot (a+b)} \cdot \left(b \cdot r_{д1} \cdot \varphi_{сц1} \cdot t + \frac{h_c}{a+b} \times \right. \\ \times \left. \left(b \cdot \varphi_{сц1} + \frac{a \cdot \varphi_{сц2}}{2 \cdot \tau_{н2}} \cdot t^2 \right) \cdot r_{д1} \cdot \varphi_{сц1} \right) \cdot r_{д1} +; \\ \dot{x}_{к2,6л.1} = \frac{G}{J_{к1} \cdot (a+b)} \cdot \left(a \cdot \varphi_{сц2} \cdot r_{д2} - \frac{h_c}{a+b} \times \right. \\ \times \left. \left(b \cdot \varphi_{сц1} + \frac{a \cdot \varphi_{сц2}}{\tau_{н2}} \cdot t \right) \cdot \varphi_{сц2} \cdot r_{д2} \right) \cdot r_{д2} +. \end{cases} \quad (52)$$



Коэффициенты относительного скольжения контактов переднего и заднего колес с учетом их догрузок от сил инерции поступательного движения на отрезке времени $\tau_{н1}$ равны:

$$\left\{ \begin{aligned} \delta_{к1}^I &= \frac{\left[\left(\frac{m_a \cdot r_{л1}}{2J_{к1} \cdot \tau_{н1}} \cdot t - 1 \right) \cdot b \cdot \varphi_{ку1} + a \cdot \varphi_{ку2} \right] \cdot g \cdot t}{V_0 \cdot (a+b) - (b \cdot \varphi_{ку1} - a \cdot \varphi_{ку2}) \cdot g \cdot t} \cdot 100\%; \\ \delta_{к2с}^I &= \frac{\left[\left(\frac{m_a \cdot a}{2J_{к2} \cdot \tau_{н2}} \cdot r_{л2} \cdot t + a \right) \cdot \varphi_{ку2} - b \cdot \varphi_{ку1} \right] \cdot t \cdot g}{V_0 \cdot (a+b) - (b \cdot \varphi_{ку1} - a \cdot \varphi_{ку2}) \cdot g \cdot t} \cdot 100\%. \end{aligned} \right. \quad (53)$$

Расчетные моменты колесных тормозов с учетом всех инерционных сил, действующих на автомобиль, равны:

$$\left\{ \begin{aligned} M_{1л} &= \frac{G \cdot b}{a+b} \cdot r_{л1} \cdot \varphi_{ку1} + \frac{G_a \cdot h_c}{(a+b)^2} \cdot \left(\frac{b \cdot \varphi_{ку1}}{\tau_{н1}} + \frac{a \cdot \varphi_{ку2}}{\tau_{н2}} \right) \cdot r_{л1} \cdot \varphi_{ку1} \cdot t + \\ &+ r_{л1} \cdot \varphi_{ку1} \cdot c_1 \cdot a \cdot \varphi + \left(\frac{b \cdot \varphi_{ку1}}{\tau_{н1}} + \frac{a \cdot \varphi_{ку2}}{\tau_{н2}} \right) \frac{G}{(a+b)^2} \cdot r_{л1} \cdot \varphi_{ку1} \cdot b \cdot t \cdot \sin \varphi; \\ M_{2л} &= \frac{G \cdot a}{a+b} \cdot r_{л2} \cdot \varphi_{ку2} - \frac{G_a \cdot h_c}{(a+b)^2} \cdot \left(\frac{b \cdot \varphi_{ку1}}{\tau_{н1}} + \frac{a \cdot \varphi_{ку2}}{\tau_{н2}} \right) \cdot r_{л2} \cdot \varphi_{ку2} \cdot t - \\ &- r_{л2} \cdot \varphi_{ку2} \cdot c_2 \cdot b \cdot \varphi + \left(\frac{b \cdot \varphi_{ку1}}{\tau_{н1}} + \frac{a \cdot \varphi_{ку2}}{\tau_{н2}} \right) \frac{G}{(a+b)^2} \cdot r_{л2} \cdot \varphi_{ку2} \cdot a \cdot t \cdot \sin \varphi. \end{aligned} \right. \quad (54)$$

Линейные скорости геометрических центров переднего и заднего колес на первом этапе торможения автомобиля с учетом всех инерционных сил, действующих на его корпус, равны:

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{x}_{к1л}^I &= \left\{ b + \frac{b \cdot \sin \varphi_1}{2 \cdot (a+b)} \cdot t + \frac{h_c}{2 \cdot (a+b)} \cdot t \right\} \cdot \left(\frac{b}{\tau_{н1}} + \frac{a \cdot \varphi_{ку2}}{\tau_{н2}} \right) \times \\ &\times \frac{G_0}{a+b} \cdot r_{л1} \cdot \varphi_{ку1} + r_{л1} \cdot \varphi_{ку1} \cdot c_1 \cdot a \cdot \varphi_1 + V_0 \cdot \frac{t}{J_{1л}} + V_0; \\ \dot{x}_{к2л}^I &= \frac{t}{J_{2л}} \cdot \left[a - \frac{h_c}{2 \cdot (a+b)} \cdot t + \frac{a \cdot \sin \varphi_1}{2 \cdot (a+b)} \cdot t \right] \cdot \left(\frac{b \cdot \varphi_{ку1}}{\tau_{н1}} + \right. \\ &\left. + \frac{a \cdot \varphi_{ку2}}{\tau_{н2}} \right) \frac{G}{a+b} \cdot r_{л2} \cdot \varphi_{ку2} - r_{л2} \cdot \varphi_{ку2} \cdot c_2 \cdot b \cdot \varphi_1 + V_0. \end{aligned} \right. \quad (55)$$

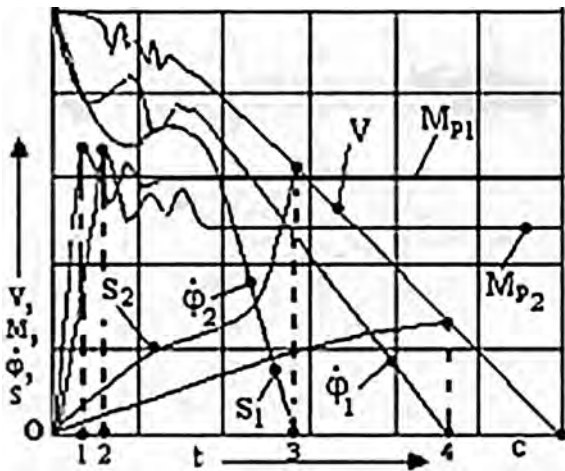


Рисунок 2 — Изменение параметров торможения автомобиля с учетом характеристик подвесок: V — скорость поступательного движения автомобиля при торможении; M_{p1}, M_{p2} — фактически реализуемые колесами передней и задней осей автомобиля моменты по условиям их сцепления; S_1, S_2 — относительное скольжение контактов колес передней и задней осей

В отличие от математической модели торможения автомобиля с одной степенью свободы, не учитывающей характеристики подвески, параметры торможения — скорость и путь торможения — зависят от массо-геометрических характеристик автомобиля при различных условиях сцепления колес передней и задней осей. Причем скорости геометрических центров масс колес передней и задней оси автомобиля на всех этапах торможения (этап нарастания момента на колесах и этапы их блокировки колес) не равны между собой и не равны поступательной скорости движения центра масс автомобиля. Данный результат говорит о том, что относительное скольжение контактов колес при торможении автомобиля всегда присутствует.

Коэффициенты относительного скольжения контактов колес передней и задней осей с учетом их догрузок от всех сил инерции на отрезке времени $\tau_{н1}$ равны:

$$\left\{ \begin{aligned} \delta_{к1с}^I &= \frac{\dot{x}_c^I - \dot{x}_{к1л}^I}{\dot{x}_c^I} \cdot 100\%; \\ \delta_{к2с}^I &= \frac{\dot{x}_c^I - \dot{x}_{к2л}^I}{\dot{x}_c^I} \cdot 100\%. \end{aligned} \right. \quad (56)$$

Аналогичным образом можно исследовать случай, когда корни характеристического уравнения (9) действительные и разные.

Анализ результатов исследований. На рисунке 2 представлены результаты моделирования процесса торможения автомобиля с учетом упругих характеристик подвесок.

Из анализа результатов моделирования процесса торможения автомобиля (см. рисунок 2) установлено, что в начале экстренного торможения происходит колебания скорости V его поступательного движения, что связано с колебаниями сил в контакте колес с опорной поверхностью. Максимальных значений коэффициенты относительного скольжения колес передней S_1 и задней осей S_2 наступают в разные моменты времени, после которых наступает полная блокировка колес. Изменения угловых скоростей вращения колес передней и задней осей $\dot{\varphi}_1$ и $\dot{\varphi}_2$ происходят по различным зако-

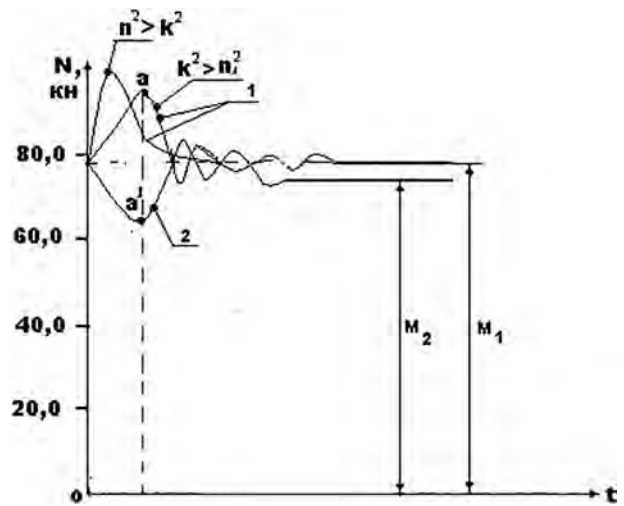


Рисунок 3 — Изменение нормальных реакций опорной поверхности колес передней и задней осей автомобиля:

- 1 — изменение нормальной реакции опорной поверхности колес задней оси автомобиля при $n^2 > k^2$ (апериодическое движение) и при $k^2 > n^2$ (затухающие колебания);
- 2 — изменение нормальной реакции опорной поверхности колес передней оси

нам. Это объясняется тем, что наличие упругих элементов вызывает различные динамические изменения нормальных реакций опорной поверхности колес, и тем самым, фактически реализуемые колесами тормозные моменты M_{p1} и M_{p2} также различны.

На рисунке 3 представлены изменения нормальных реакций опорной поверхности колес при различных характеристиках частот угловых колебаний остова. Колебательный характер изменения реализуемого тормозного момента связан с изменениями нормальных реакций опорной поверхности колес, поэтому при разработке алгоритма антиблокировочной системы (ABS) необходимо учитывать частотные характеристики автомобиля с упруго-диссипативными связями подвесок.

В зависимости от упруго-диссипативных характеристик подвесок автомобиля законы изменения нормальных реакций опорной поверхности колес различны. Например, при возрастании вязкого сопротивления амортизатора $n_2 > k_2$ изменение нормальной реакции опорной поверхности колес задней оси автомобиля имеет аperiodический характер, а при высокой частоте собственных колебаний остова $k_2 > n_2$ изменения нормальных реакций опорной поверхности колес имеют затухающий колебательный характер.

При одних и тех же значениях коэффициентов сцепления колес с опорной поверхностью реализация моментов, формируемых в колесных тормозах, и коэффициенты относительного скольжения контактов колес зависят от изменений нормальных реакций опорной поверхности.

Выводы. 1. Математическая модель процесса торможения автомобиля с пятью степенями свободы, учитывающая упруго-диссипативные характеристики подвесок позволяет исследовать изменения нормальных реакций опорной поверхности колес в зависимости от частот собственных колебаний остова автомобиля, изменения коэффициентов относительного скольжения

контактов колес, необходимых для оценки устойчивости движения машины при торможении.

2. Результатами моделирования процесса торможения автомобиля установлено, что ускорение замедления, путь торможения зависят от коэффициентов сцепления колес с опорной поверхностью, массо-геометрических параметров автомобиля, упруго-диссипативных характеристик подвесок, начальной скорости торможения и закона нарастания моментов в колесных тормозах (в классической теории торможения автомобиля полагают, что ускорение замедления автомобиля зависит только от коэффициентов сцепления колес с опорной поверхностью).

3. Угловые скорости вращения колес передней и задней осей автомобиля при торможении, в общем случае, различны, поэтому при торможении полноприводного автомобиля без отключения сцепления с заблокированными приводами ведущих колес могут привести к возникновению циркуляции мощности в трансмиссии машины.

Список литературы

1. Основы алгоритмов систем активной безопасности магистральных автотранспортных средств (САБ АТС) на основе измерения и анализа силовых факторов / В.А. Ким [и др.] // Международная научно-практическая конференция, посвященная 25-летию установления дипломатических отношений между Российской Федерацией и Республикой Корея, Москва, 19–21 июля. — С. 346–349.
2. Ким, В.А. Методология создания систем активной безопасности автотранспортных средств на основе анализа сил / В.А. Ким. — Могилев: Беларус.-Рос. ун-т, 2003. — 347 с.: ил.
3. Сазонов, И.С. Динамическое регулирование режимов движения полноприводных колесных машин / И.С. Сазонов. — Минск: БГПА, 2001. — 185 с.: ил.
4. Динамика колесных машин: монография / И.С. Сазонов [и др.]; под общ. ред. И.С. Сазонова. — Могилев: Беларус.-Рос. ун-т, 2006. — 462 с.

Sazonov I.S., Kim V.A., Ki-Yong Choi, Bilyk O.V., Melnikov A.S., Bilyk S.Yu.

Mathematical model of braking of the car with account for elastic and dissipative bonds

The work presents the mathematical model of braking process of the car with five degrees of freedom with the given laws of the braking torque variation formed by the driver in wheel brake gears which takes into consideration elastic and dissipative bonds of suspensions as well. The gained formulas make it possible to study transient processes of car braking, to determine interrelation between the parameters of car braking process, weight and dimensions of the car and the laws of braking torque formation in wheel brakes.

Поступил в редакцию 31.10.2016.