УДК 378

РЕШЕНИЯ НАИБОЛЕЕ СЛОЖНЫХ ЗАДАЧ IX ОТКРЫТОЙ ОЛИМПИАДЫ БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ПО МАТЕМАТИКЕ

В. Г. ЗАМУРАЕВ
Белорусско-Российский университет
Могилёв, Беларусь

IX Открытая олимпиада Белорусско-Российского университета по математике [1, 2] состоялась 22 февраля 2018 г. В соревновании приняли участие 46 студентов и аспирантов из 20 вузов Аргентины, Беларуси, Грузии, Польши, России, Таджикистана и Чехии. Участникам было предложено для решения 30 заданий в тестовой форме, которые следовало выполнить в течение 5 часов. Жюри проверяло лишь ответы. При подсчёте количества набранных баллов учитывались коэффициенты сложности заданий: чем меньшее число участников дали правильный ответ, тем более сложным считалось задание.

Победителем олимпиады стал студент Санкт-Петербургского государственного университета Будимир Баев. Второе место занял студент Московского технологического университета Евгений Кичак. Третьим стал студент университета имени Адама Мицкевича в Познани (Польша) Войтех Ваврув. Все три призёра дали по 18 правильных ответов.

Наиболее сложными заданиями девятой олимпиады оказались рассматриваемые ниже задачи 1 и 2, которые не решил ни один участник, а также задачи 3, 4 и 5, правильные ответы в которых смогли дать лишь по одному участнику.

Задача 1 [3, с. 487]. Диагонали двух одинаковых кубов с ребром, равным 8, лежат на одной и той же прямой. Вершина второго куба совпадает с центром первого, и второй куб повёрнут вокруг диагонали на 60º по отношению к первому. Найдите объём общей части этих кубов.

Решение. Обозначим центры кубов через O и O_1. Пусть первоначально угол поворота 0º. Если провести сечение через центр общей части двух кубов перпендикулярно диагонали, то получится правильный шестиугольник. После поворота на 60º этот шестиугольник совместится сам с собой, т. е. рёбра кубов пересекаются. Тогда общая часть состоит из двух одинаковых правильных треугольных пирамид с вершинами в точках O и O_1. Обозначим боковое ребро каждой их этих пирамид через a. Так как все углы при вершине – прямые, то объём каждой пирамиды $V_1 = \dfrac{a^3}{6}$. Высота каждой из пирамид $h = \dfrac{OO_1}{2} = \dfrac{8\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3}$. С другой стороны,

$$V_1 = \frac{1}{3}\frac{\left(a\sqrt{2}\right)^2\sqrt{3}}{4}h = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}h.$$

Имеем $\dfrac{a^3}{6} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{6}h$, откуда $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Значит, $\dfrac{a\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$, т. е. $a = 6$.

Итак, искомый объём $V = 2V_1 = \dfrac{a^3}{3} = 72$.

Ответ: 72.

Задача 2 [4, с. 104]. Найдите сумму ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n\left((n-1)!\right)^2}{(2n)!}$.

Решение. Рассмотрим степенной ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left((n-1)!\right)^2}{(2n)!}(2x)^{2n}$. Дифференцируя этот ряд по x дважды (в интервале сходимости $|x| < 1$) и умножая вторую производную его на $1 - x^2$, после некоторых преобразований рядов получаем дифференциальное уравнение относительно искомой суммы $S(x)$ ряда:

$$\left(1-x^2\right)S''(x)-xS'(x)-4=0.$$

Производя в нём замену независимого переменного x по формуле $t=\arcsin x$, приходим к уравнению $S''(t)=4$, из которого находим

$$S(t)=2t^2+C_1t+C_2,$$

где C_1, C_2 – постоянные.

Так как $S(0)=S'(0)=0$, то отсюда получаем

$$S(x)=2(\arcsin x)^2,\ |x|<1.$$

Нетрудно найти, что числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{((n-1)!)^2}{(2n)!}4^n$, являющийся значением данного степенного ряда при $x=\pm 1$, в силу признака Гаусса, сходится. А тогда, по теореме Абеля и на основании непрерывности функции $x\mapsto 2(\arcsin x)^2$ на сегменте $[-1,1]$, можем утверждать, что $S(x)=2(\arcsin x)^2$ при $|x|\le 1$. При $x=1$ получаем $S(1)=\frac{\pi^2}{2}$.

Ответ: $\frac{\pi^2}{2}$.

Задача 3 [5, с. 64]. На сфере радиуса 2 расположены три попарно касающиеся окружности радиуса 1. Найдите радиус наименьшей окружности, расположенной на данной сфере и касающейся всех трёх данных окружностей.

Решение. Пусть O – центр сферы, O_1, O_2 и O_3 – центры данных окружностей, O_4 – центр искомой окружности. Рассматривая сечение сферы плоскостью OO_1O_2, легко доказать, что OO_1O_2 – правильный треугольник со стороной $\sqrt{3}$. Прямая OO_4 проходит через центр треугольника $O_1O_2O_3$ перпендикулярно его плоскости, а значит, расстояния от вершин этого треугольника до прямой OO_4 равны 1. Пусть K – точка касания окружностей с центрами O_1 и O_4, L – основание перпендикуляра, опущенного из O_1 на OO_4, N – основание перпендикуляра, опущенного из K на O_1L. Так как ΔO_1KN подобен ΔOO_1L, то

$O_1N = \dfrac{OL \cdot O_1K}{OO_1} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$, а значит, искомый радиус O_4K равен $LN = 1 - \sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Ответ: $1 - \sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Задача 4 [4, с. 108]. Вычислите интеграл $\int\limits_0^{2\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x) \cos 5x dx$.

Решение. Разлагая функцию $x \mapsto e^{\cos x} \cos(\sin x)$ в ряд, находим

$$e^{\cos x} \cos(\sin x) = \operatorname{Re}(e^z) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos kz}{k!},$$

где $z = e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

Полученный ряд, в силу признака Вейерштрасса, сходится равномерно на всей числовой прямой и функции $x \mapsto \cos kx$ непрерывны, поэтому ряд можно почленно интегрировать вместе с функцией $x \mapsto \cos 5x$. Имеем

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x) \cos 5x dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int\limits_0^{2\pi} \cos kx \cos 5x dx = \frac{\pi}{120}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{120}$.

Задача 5 [6, с. 148]. Дуга кривой $r = \dfrac{\sin\varphi - \cos\varphi}{1 + \sin 2\varphi}$, $\dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$, вращается вокруг луча $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$. Найдите объём полученного тела вращения.

Решение. Перейдя к прямоугольным координатам, получаем уравнение кривой $x^2 + y^2 + 2xy - x - y = 0$, симметричной относительно прямой $y = -x$. Повернув оси координат на угол $\dfrac{\pi}{4}$, т. е. положив

$$x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}},$$

получаем уравнение параболы в виде $y' = \sqrt{2} x'^2$. Из интервала изменения полярного угла φ следует, что вращается вокруг оси Ox' дуга параболы, заключённая между точками $(0, 0)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Поэтому

$$V = \pi \int_0^{1/\sqrt{2}} y^2 dx = 2\pi \int_0^{1/\sqrt{2}} x^4 dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{20}.$$

Ответ: $\frac{\pi\sqrt{2}}{20}$.

Правильный ответ в задании 3 дал Будимир Баев, правильные ответы в заданиях 4 и 5 дали соответственно Файзулло Исматов и Собирджон Бобиев (оба – Таджикский национальный университет).

Наиболее простыми заданиями олимпиады оказались приведенные ниже задачи 6, 7 и 8, правильные ответы в которых дали 35 и по 31 участнику.

Задача 6 [7, с. 67]. Сумма натуральных чисел a_1, a_2, …, a_{10} равна 1001. Найдите наибольшее возможное значение наибольшего общего делителя этих чисел.

Ответ: 91.

Задача 7 [8, с. 264]. По кругу выписаны 200 крестиков и 180 ноликов; число пар стоящих рядом крестиков равно 50. Чему равно число пар стоящих рядом ноликов?

Ответ: 30.

Задача 8 [9, с. 45]. Сколько рациональных членов содержится в разложении $\left(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}\right)^{100}$?

Ответ: 17.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Замураев, В. Г.** Открытая олимпиада Белорусско-Российского университета по математике / В. Г. Замураев // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях : материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2017. – С. 22–24.

2. **Замураев, В. Г.** Решения наиболее сложных задач VIII Открытой олимпиады Белорусско-Российского университета по математике / В. Г. Замураев // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях : материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2018. – С. 12–15.

3. Полный сборник решений задач для поступающих в вузы. Группа B / Под ред. М. И. Сканави. – Москва : Мир и образование ; Минск : Харвест, 2003. – 608 с.

4. Справочное пособие по высшей математике. Т. 2 : Математический анализ: ряды, функции векторного аргумента / И. И. Ляшко, А. К. Боярчук, Я. Г. Гай, Г. П. Головач. – Москва : Едиториал УРСС, 2003. – 224 с.

5. **Прасолов, В. В.** Задачи по стереометрии / В. В. Прасолов, И. Ф. Шарыгин. – Москва : Наука, 1989. – 289 с.

6. **Беркович, Ф. Д.** Задачи студенческих математических олимпиад с указаниями и решениями : учебное пособие / Ф. Д. Беркович, В. С. Федий, В. И. Шлыков. – Ростов-на-Дону : Феникс, 2008. – 171 с.

7. Сборник задач Киевских математических олимпиад / В. А. Вышенский, Н. В. Карташов, В. И. Михайловский, М. И. Ядренко. – Киев : Вища школа, 1984. – 240 с.

8. Математическое просвещение / Под ред. И. Н. Бронштейна. – Москва : Физ.-мат. лит-ра, 1960. – Вып. 5. – 306 с.

9. **Шахно, К. У.** Сборник задач по элементарной математике повышенной трудности / К. У. Шахно. – Минск : Высшая школа, 1965. – 523 с.