УДК 512.643

СИСТЕМА УПРАЖНЕНИЙ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО КРУЖКА ПО ТЕМЕ «МАТРИЦЫ»

Т. Ю. ОРЛОВА, С. Ф. ПЛЕШКУНОВА
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

В настоящее время, в связи с переходом на четырехлетнее обучение, в вузах происходит сокращение часов по общеобразовательным дисциплинам, в том числе и по математике. Кроме этого, студенты одной академической группы имеют разный уровень математической подготовки. В связи с этим, во время аудиторных занятий нет возможности уделить должное внимание математически одаренным студентам, которые хотят и могут совершенствовать свои способности.

Поэтому в Белорусско-Российском университете для студентов, которые желают углубленно изучать математику, развивать логическое мышление, а также участвовать в различных математических олимпиадах, работает математический кружок [1].

Приведем подборку задач для математического кружка по теме «Матрицы» и методы их решения.

1. $AXA + AX = E$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Найти X.

Решение данной задачи обычно не вызывает у студентов затруднений, т. к. искомая матрица легко выражается.

$$AX(A+E) = E \Rightarrow X = A^{-1}E(A+E)^{-1} = ((A+E)A)^{-1} \Rightarrow X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. $X + SX + XS = A$, где $A, S -$ матрицы порядка n, $S^2 = O$. Найти X.

Сложность решения задачи заключается в том, что про вырожденность данных матриц в условии не сказано, следовательно, нельзя использовать обратные матрицы.

Рассмотрим один из вариантов преобразований данного матричного равенства:

$$\begin{cases} S(X + SX + XS) = SA, \\ (X + SX + XS)S = AS, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} SX + SXS = SA, \\ XS + SXS = AS. \end{cases}$$

Сложим получившиеся равенства и подставим

$$SX + XS = A - X.$$

Получим

$$-X + 2SXS = SA + AS - A.$$

Имеем

$$\begin{cases} S(-X + 2SXS) = S(SA + AS - A), \\ (-X + 2SXS)S = (SA + AS - A)S, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -SX = SAS - SA, \\ -XS = SAS - AS. \end{cases}$$

Сложим получившиеся равенства и вновь подставим

$$SX + XS = A - X.$$

Получим

$$X = 2SAS - SA - AS + A.$$

3. Найти $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{2008}$.

То, что надо найти закономерность при возведении матрицы в степень n, студенты обычно видят. Но почему-то с её выявлением бывают проблемы.

$$A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^3=-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=-E.$$

Дальше проще:

$$A^4=-E\cdot A=-A \Rightarrow A^5=-A^2 \Rightarrow A^6=E \Rightarrow A^7=A,\ldots$$

Очевидно, $A^{2008}=A^4=-A=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$.

4. Даны матрицы A, B, для которых выполняются условия: $AB=BA,\ A\neq B,\ A^2=B^2$. Докажите, что матрица $A+B$ не имеет обратной.

Задачи на доказательство почти всегда вызывают сложность.

Найдём произведение матриц $A-B$ и $A+B$:

$$(A-B)(A+B)=A^2+AB-BA-B^2=O.$$

Предположим, что матрица $A+B$ имеет обратную. Тогда

$$(A-B)(A+B)(A+B)^{-1}=O(A+B)^{-1} \Rightarrow A-B=O \Rightarrow A=B,$$

что противоречит условию. Следовательно, предположение неверное.

5. Определитель матрицы A равен 1, а все элементы матриц A^{2015} и A^{2017} – целые числа. Верно ли, что все элементы матрицы A тоже целые числа?

Если $\det A=1$,. то $\det A^n=1, \quad n\in \mathbf{Z}$.

Если $\det B=1$, и матрица B имеет целые элементы, то B^{-1} также имеет целые элементы.

$A^{2017}=A^{2015}\cdot A^2 \Rightarrow A^2=A^{-2015}\cdot A^{2017}$ имеет целые элементы.

$A=A^{2015-2014}=A^{2015}\cdot\left(A^2\right)^{-1007}$ имеет целые элементы.

6. Сколько существует различных невырожденных матриц 3-го порядка, элементами которых являются числа «0» или «1»? (10-th Internet Mathematics Olympiad for Students, университет Ариель, Израиль).

Пусть $A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$, где $\vec{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \vec{c}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ – векторы, соединяющие вершины единичного куба. $\det A \neq 0$,. т. к. векторы некомпланарны.

Введём систему координат так, чтобы вершины куба $OABCO_1A_1B_1C_1$ имели координаты $O(0;0;0)$, $A(1;0;0)$, $B(1;1;0)$, $C(0;1;0)$, $O_1(0;0;1)$, $A_1(1;0;1)$, $B_1(1;1;1)$, $C_1(0;1;1)$. Рассмотрим радиус-векторы вершин куба, их семь. Следовательно, матриц с соответствующими столбцами можно составить $A_7^3=210$. Из этих матриц вырожденными будут те, которые составлены из компланарных векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$. Их $6\cdot 6=36$ (6 плоскостей, содержащих точку O, по 3! комбинации в каждой). Значит, различных невырожденных матриц 3-го порядка, элементами которых являются числа «0» или «1», будет $210-36=174$.

7. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $D=\left(A^{-1}\right)^{2013}\cdot B^{2014}$. В ответ записать элемент, стоящий в первой строке и третьем столбце матрицы D, т. е. d_{13}. (Задачи IV Открытой олимпиады Белорусско-Российского университета по математике [2]).

Типовая задача в виде текста, в которой в ответ требуется записать лишь одно число. Поэтому полностью находить матрицу $D=\left(A^{-1}\right)^{2013}\cdot B^{2014}$ не имеет смысла.

Найдём B^{2014}.

$$B^2=-E \Rightarrow B^3=-B \Rightarrow B^4=E \Rightarrow B^{2014}=B^2=-E.$$

Нас интересует третий столбец этой матрицы.

Методом элементарных преобразований легко находится матрица

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее находим A^{-n}. Помним, что нас интересует только первая строка, а точнее даже элемент a_{13}^{-1}. Заметим, что данный элемент находится по формуле $a_n = a_{n-1} + (n-1)$. Следовательно,

$$a_{2013} = 1 + 2 + \ldots + 2012 = \frac{1+2012}{2} \cdot 2013 = 2025078.$$

Искомый элемент $d_{13} = -1 \cdot 2025078 = -2025078$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Орлова, Т. Ю.** Концепция кружка по углубленному изучению математики / Т. Ю. Орлова, С. Ф. Плешкунова // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях : материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2018. – С. 19–20.

2. **Замураев, В. Г.** Открытая олимпиада Белорусско-Российского университета по математике / В. Г. Замураев // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях : материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев, 2017. – С. 22–24.