УДК 519.1

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧ

И. У. ПРИМАК
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Наиболее известные экстремальные задачи, с которыми знакомят студентов при изучении дисциплины «Основы комбинаторики», это: «задача о коммивояжёре», «задача о назначении», минимального покрытия графа, наикратчайшего пути в графе, максимального потока в сети [1–3]. Стандартный подход при решении этих задач основывается на использовании достаточно специфических методов [1–3]. Так, например, метод ветвлений и ограничений применяют для решения «задачи о коммивояжёре». При поиске наикратчайшего пути изучаются алгоритмы Форда, Дейкстры. Задача максимизации потока в сети решается на основе «метода расстановок меток». В тоже время представляет интерес подход, который основан на формулировании целевой функции задачи и ее анализе (минимизации или максимизации) с помощью программных продуктов, таких как Microsoft Excel, OpenOffice Calc, Mathcad и т. д. [4]. В дополнение к стандартному данный подход позволяет расширить базовую подготовку будущих инженеров и их понимание, навыки решения задач практической оптимизации. Продемонстрируем возможности такого подхода на примере «задачи о коммивояжёре».

Задача о коммивояжёре.

Коммивояжёру необходимо посетить несколько городов. Он должен выбрать кратчайший (оптимальный) маршрут, чтобы, начав двигаться из своего города, побывать по одному разу в других городах и вернуться назад. Попарные расстояния между городами заданы в виде матрицы (c_{ij}): $i, j = \overline{1, n}$, где n − число всех городов, фигурирующих в задаче.

Математически это означает поиск минимума целевой функции [1]:

$$f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}, \tag{1}$$

с ограничениями

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = \overline{1, n}, \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \ j = \overline{1, n}, \tag{2}$$

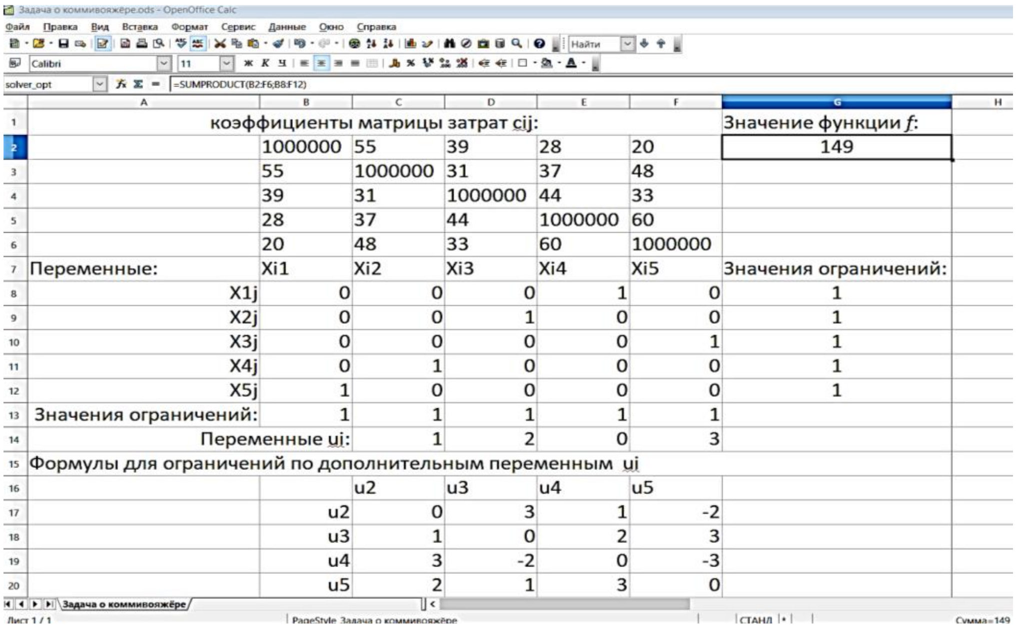
$$u_i - u_j + (n-1)x_{ij} \le n-2, i \ne j, i, j = \overline{2, n} \tag{3}$$

относительно неизвестных x_{ij} $(i,\ j=\overline{1,n})$. При этом,

$$x_{ij}=\begin{cases}1, \text{если переезд осуществляется из } i\text{-го города } j\text{-й город;}\\ 0, \text{в противном случае.}\end{cases}$$

В (3) u_i – дополнительные переменные, которые введены, чтобы обеспечить замкнутость маршрутов и отсутствие подциклов (несвязанных между собой).

На рис. 1 представлен пример данных (матрица (c_{ij}): $i,\ j=\overline{1,5}$) и результатов минимизации соответствующей целевой функции f в инструментальной среде надстройки OpenOffice Calc «Решатель».



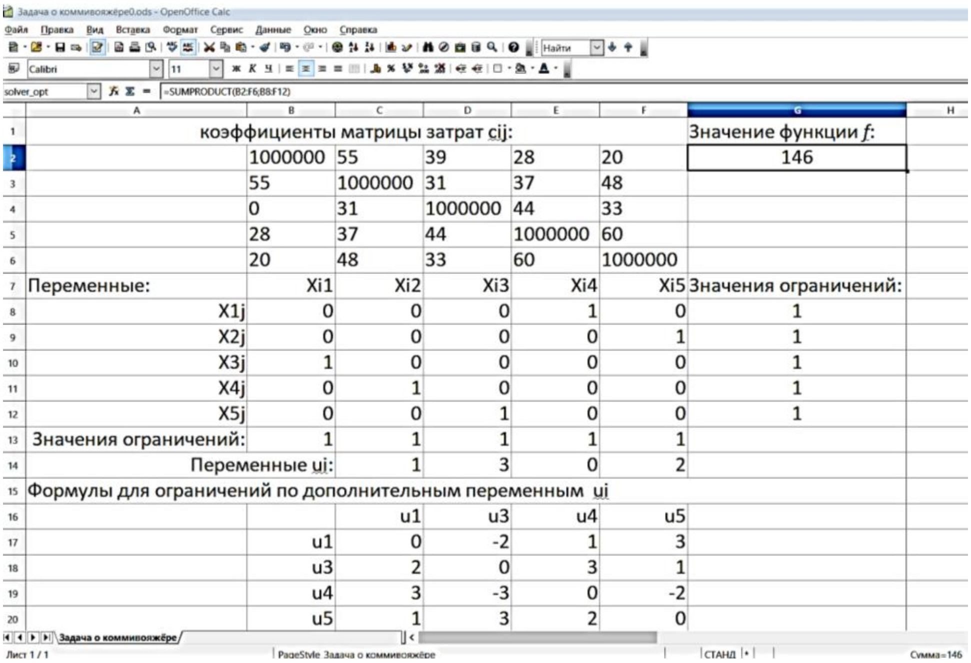
	A	B	C	D	E	F	G
1	коэффициенты матрицы затрат cij:						Значение функции *f*:
2		1000000	55	39	28	20	149
3		55	1000000	31	37	48	
4		39	31	1000000	44	33	
5		28	37	44	1000000	60	
6		20	48	33	60	1000000	
7	Переменные:	Xi1	Xi2	Xi3	Xi4	Xi5	Значения ограничений:
8	X1j	0	0	0	1	0	1
9	X2j	0	0	1	0	0	1
10	X3j	0	0	0	0	1	1
11	X4j	0	1	0	0	0	1
12	X5j	1	0	0	0	0	1
13	Значения ограничений:	1	1	1	1	1	
14	Переменные ui:		1	2	0	3	
15	Формулы для ограничений по дополнительным переменным ui						
16			u2	u3	u4	u5	
17		u2	0	3	1	-2	
18		u3	1	0	2	3	
19		u4	3	-2	0	-3	
20		u5	2	1	3	0	

Рис. 1. Внешний вид рабочего листа OpenOffice Calc с исходными данными и результатами решения «задачи о коммивояжёре»

В соответствии с этими результатами: длина кратчайшего маршрута (№ 1–№ 4–№ 2–№ 3–№ 5–№ 1 или № 1–№ 5–№ 3–№ 2–№ 4–№ 1) равна 149 км.

«Задачу о коммивояжёре» можно рассмотреть и в более широкой постановке. Например, предложить поиск кратчайшего маршрута, проходящего однократно через все города, который начинается и заканчивается в разных городах. Для решения такой задачи необходимо на основе модели (1)–(3), как и ранее, построить замкнутый маршрут. При этом оптимальный маршрут определяется как часть найденного замкнутого маршрута.

На рис. 2 представлены результаты поиска такого маршрута с началом и концом в городах № 1 и № 3 соответственно. Для того чтобы оптимальный маршрут заканчивался в городе № 3 (в замкнутом маршруте это город, из которого коммивояжёр возвращается в свой город, пройдя все остальные города), необходимо положить в матрице расстояний $c_{31} = 0$.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1		коэффициенты матрицы затрат cij:					Значение функции *f*:	
2		1000000	55	39	28	20	146	
3		55	1000000	31	37	48		
4		0	31	1000000	44	33		
5		28	37	44	1000000	60		
6		20	48	33	60	1000000		
7	Переменные:	Xi1	Xi2	Xi3	Xi4	Xi5	Значения ограничений:	
8	X1j	0	0	0	1	0	1	
9	X2j	0	0	0	0	1	1	
10	X3j	1	0	0	0	0	1	
11	X4j	0	1	0	0	0	1	
12	X5j	0	0	1	0	0	1	
13	Значения ограничений:	1	1	1	1	1		
14		Переменные ui:	1	3	0	2		
15	Формулы для ограничений по дополнительным переменным ui							
16			u1	u3	u4	u5		
17		u1	0	-2	1	3		
18		u3	2	0	3	1		
19		u4	3	-3	0	-2		
20		u5	1	3	2	0		

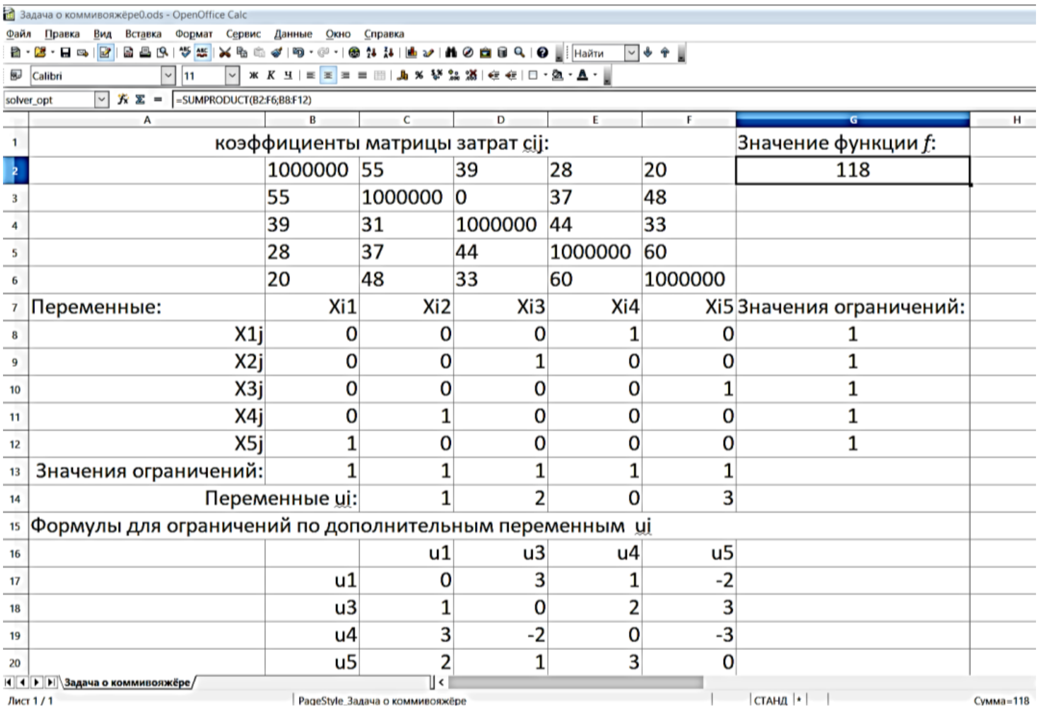
Рис. 2. Внешний вид рабочего листа OpenOffice Calc с исходными данными и результатами решения «задачи о коммивояжёре» для маршрута с началом в городе № 1 и концом в городе № 3

В соответствии с этими результатами замкнутый маршрут № 1–№ 4–№ 2–№ 5–№ 3–№ 1. Его часть № 1–№ 4–№ 2–№ 5–№ 3 между городами № 1 и № 3 является оптимальной с длиною 146 км.

На рис. 3 представлены результаты поиска маршрута с началом и концом в городах № 2 и № 3 соответственно. Для того чтобы оптимальный маршрут начинался в городе № 2 и заканчивался в городе № 3 необходимо положить в матрице расстояний $c_{23} = 0$. Начало и конец оптимального маршрута можно также изменить, переопределив дополнительные переменные (3).

В соответствии с рис. 3 замкнутый маршрут № 1–№ 4–№ 2–№ 3–№ 5–№ 1. При этом оптимальный маршрут № 2–№ 4–№ 1–№ 5–№ 3 между городами № 2 и № 3 имеет длину 118 км.

Приведенные примеры демонстрируют возможности и результативность рассматриваемого подхода решения комбинаторных экстремальных задач. Описанное решение реализуется также при решении «задачи о назначениях». Оно будет полезно при изучении студентами теории графов, т. к. «задача о коммивояжёре» тесно связана с построением гамильтоновых путей и циклов в графе [3]. Это говорит о достаточной общности данного подхода. При этом практика использования простых программных продуктов позволяет студентам быстро и рационально расширить свой инструментарий для решения различных задач.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	коэффициенты матрицы затрат cij:						Значение функции *f*:	
2		1000000	55	39	28	20	118	
3		55	1000000	0	37	48		
4		39	31	1000000	44	33		
5		28	37	44	1000000	60		
6		20	48	33	60	1000000		
7	Переменные:	Xi1	Xi2	Xi3	Xi4	Xi5	Значения ограничений:	
8	X1j	0	0	0	1	0	1	
9	X2j	0	0	1	0	0	1	
10	X3j	0	0	0	0	1	1	
11	X4j	0	1	0	0	0	1	
12	X5j	1	0	0	0	0	1	
13	Значения ограничений:	1	1	1	1	1		
14		Переменные ui:	1	2	0	3		
15	Формулы для ограничений по дополнительным переменным ui							
16			u1	u3	u4	u5		
17		u1	0	3	1	-2		
18		u3	1	0	2	3		
19		u4	3	-2	0	-3		
20		u5	2	1	3	0		

Рис. 3 Внешний вид рабочего листа OpenOffice Calc с исходными данными и результатами решения «задачи о коммивояжёре» для маршрута с началом в городе № 2 и концом в городе № 3

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Рыбников, К. А.** Введение в комбинаторный анализ / К. А. Рыбников. – Москва : Изд-во Москов. ун-та, 1985. – 308 с.

2. **Пападимитриу, Х.** Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность / Х. Пападимитриу, К. Стайглиц. – Москва : Мир, 1982. – 510 с.

3. **Шапорев, С. Д.** Дискретная математика. Курс лекций и практических занятий / С. Д. Шапорев. – Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2006. – 400 с. : ил.

4. **Семенец, С. Н.** Моделирование комбинаторных задач на графах в терминах задачи математического программирования / С. Н. Семенец, С. С. Насонова // Вісник Придніпровської державної академії будівництва та архітектури. – 2015. – № 11 (212). – С. 73–80.