УДК 519.1

ТРИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ ГРИНБЕРГА

А. Ю. ЭВНИН
ФГАОУ ВО «Южно-Уральский государственный университет
(Национальный исследовательский университет)»
Челябинск, Россия

Теорема Гринберга [1] даёт необходимое условие того, чтобы граф был одновременно гамильтоновым и планарным. Несмотря на её простоту и эффективность при решении различных задач, она практически не отражена в русскоязычной учебной литературе. Мы приведём три различных доказательства этой теоремы, последнее из которых доступно рядовым школьникам.

Теорема [Э. Гринберг, 1968 г.] Пусть G – плоский гамильтонов граф с n вершинами, C – гамильтонов цикл в этом графе, f_k – количество k-угольных граней внутри C, а g_k – количество k-угольных граней вне C (для каждого k), тогда

$$\sum_{k=3}^{n}(k-2)(f_k-g_k)=0. \qquad (1)$$

Доказательство. Будем называть грани графа, лежащие внутри C, внутренними, а вне C – внешними. Установим сначала равенство

$$\sum_{k=3}^{n}(k-2)f_k=n-2. \qquad (2)$$

Назовём рёбра графа, не входящие в гамильтонов цикл C, хордами.

1-й способ (индукция). Индукция по числу хорд. База индукции: хорд нет, граф представляет собой цикл. Тогда $f_n=1$, $f_k=0$ при $k<n$, и равенство (2) очевидно.

Посмотрим, что происходит с величиной $\sum kf_k-2\sum f_k$ при добавлении новой хорды. Сумма $\sum kf_k$ представляет собой суммарный периметр всех внутренних граней. Проведение новой хорды увеличивает эту величину на 2. В свою очередь, $\sum f_k$ – общее количество внутренних граней. Новая хорда делит одну из граней на две грани и увеличивает количество граней на 1, удвоенная сумма увеличивается на 2. Таким образом, величина $\sum kf_k - 2\sum f_k$ остаётся неизменной – равной $n-2$.

2-й способ (с помощью формулы Эйлера). Рассмотрим плоский граф G', получающийся из G удалением рёбер, не входящих во внутреннюю грань. В нём n вершин. Число его рёбер и граней обозначим соответственно через m и f. Заметим, что $\sum kf_k = 2m - n$. Действительно, в вычисляемой сумме ребро, не входящее в C, учитывается один раз, а все остальные по 2 раза. Кроме того, $\sum f_k = f - 1$ (исключаем внешнюю грань). Подставив найденные выражения в (2), получим

$$\sum kf_k - 2\sum f_k = 2m - n - 2(f-1) = n - 2.$$

Последнее равенство равносильно $n - m + f = 2$ – формуле Эйлера для графа G'.

3-й способ (с помощью элементарной геометрии). Рассмотрим укладку графа G' в виде выпуклого n-угольника. Хорды будут изображаться непересекающимися диагоналями. После умножения обеих частей равенства (2) на число π получим справа сумму углов n-угольника, а слева сумму углов по всем многоугольникам, на которые непересекающиеся диагонали делят n-угольник. Очевидно, суммы совпадают.

Внешние и внутренние грани можно поменять местами. Поэтому наряду с (2) также имеем

$$\sum_{k=3}^{n} (k-2)g_k = n - 2. \tag{3}$$

Тождество Гринберга (1) получается вычитанием из равенства (2) равенства (3). ►

В заключение приведём задачу на применение формулы Гринберга.

Задача. Докажите, что граф G с 46 вершинами, изображённый на рис. 1, не является гамильтоновым.

Доказательство. В графе G есть 9-угольная грань, три 8-угольных грани, а остальные грани 5-угольные. В обозначениях из формулировки теоремы Гринберга $f_5 + g_5 = 21$; $f_8 + g_8 = 3$; $f_9 + g_9 = 1$. В сумме $\sum_{k=3}^{n}(k-2)(f_k - g_k)$ все слагаемые, кроме трёх (при $k = 5, 8, 9$), равны нулю. Из ненулевых слагаемых два делятся на 3 (при $k = 5$ и 8), а одно (при $k = 9$) не делится на 3. Поэтому указанная сумма не делится на 3, в силу чего не равно нулю, что противоречит (1). ►

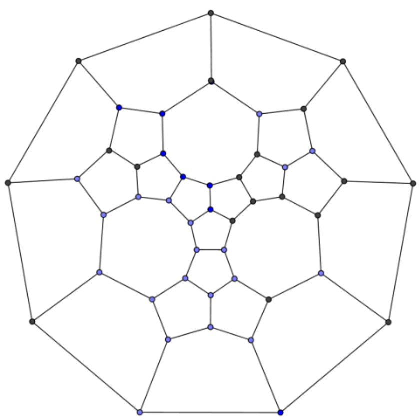

Рис. 1. Граф G

Подборку задач на теорему Гринберга можно найти в [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гринберг, Э. Я.** Плоские однородные графы степени три без гамильтоновых циклов / Э. Я. Гринберг // Латв. матем. ежегодник. – 1968. – Т. 4. – С. 51–58.
2. **Эвнин, А. Ю.** Теорема Гринберга и её применение / А. Ю. Эвнин // Математическое образование. – 2018. – № 1 (85). – С. 60–65.