О СУЩЕСТВОВАНИИ И ПОСТРОЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПАРАМЕТРОМ

В.А. Ливинская

Изучается задача о периодических решениях с периодом ω уравнения

$$\ddot{X} = \lambda A(t)X + \lambda^2(P(t)X + XB(t)) + F_0(t) + \lambda F_1(t), \quad X \in \mathbb{R}^{n\times m}, \tag{1}$$

где $A(t)$, $B(t)$, $P(t)$, $F_i(t)$ $(i = 0,1)$ — непрерывные ω–периодические матрицы соответствующих размерностей, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Данная работа является продолжением [1] и развитием [2–4]. На основе применения метода [5, гл. II] получены коэффициентные достаточные условия однозначной разрешимости задачи, оценка области локализации и алгоритм построения решения.

Введём следующие обозначения:

$$\tilde{A}(\omega) = \int\limits_0^\omega A(\tau)\,d\tau, \quad \gamma = \|\tilde{A}^{-1}(\omega)\|, \quad \varepsilon = |\lambda|, \quad \alpha = \max_t \|A(t)\|, \quad \beta = \max_t \|B(t)\|,$$

$$\mu = \max_t \|P(t)\|, \quad h_i = \max_t \|F_i(t)\|, \quad q_1 = \frac{1}{4}\gamma\alpha^2\omega^3 + \gamma(\beta+\mu)\omega, \quad q_2 = \frac{1}{4}\gamma\alpha(\beta+\mu)\omega^3,$$

$$q = \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2, \quad K = \frac{1}{2}\varepsilon\omega[\alpha + \varepsilon(\beta+\mu)], \quad H = \gamma\omega\left(\frac{1}{4}\alpha\omega^2 + \frac{1}{\varepsilon}\right)(h_0 + \varepsilon h_1),$$

где $t \in [0,\omega]$, $\|\cdot\|$ — согласованная норма матриц.

Теорема. *Пусть выполнены условия* $\det\tilde{A}(\omega) \neq 0$, $0 < q < 1$. *Тогда* ω*-периодическое решение уравнения* (1) *существует и единственно. Решение* $X(t,\lambda)$ *представимо в виде* $X(t,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{k-1}X_{k-1}(t)$, *где матрицы* $X_{k-1}(t)$ *определены рекуррентным интегральным соотношением типа* [2, 3].

Исследованы сходимость и скорость сходимости соответствующего алгоритма, при этом получены оценки

$$\|X(t,\lambda)\| \leqslant \frac{H}{1-q}, \quad \|\dot{X}(t,\lambda)\| \leqslant \frac{KH}{1-q} + \frac{1}{2}\omega(h_0 + \varepsilon h_1),$$

а также оценка области значений параметра λ, в которой уравнение (1) имеет единственное ω-периодическое решение.

Литература

1. Лаптинский В. Н., Ливинская В. А. *О структуре периодических решений матричного уравнения Ляпунова второго порядка с параметром* // Международная математическая конференция «Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям»: материалы Междунар. науч. конф. 2015. Ч. 1. С. 77–78.

2. Лаптинский В. Н., Ливинская В. А. *Об аналитической структуре периодических решений матричного дифференциального уравнения типа Ляпунова* // Дифференц. уравнения, 2000. Т. 36, № 9. С. 1290–1291.

3. Лаптинский В. Н., Ливинская В. А. *К теории периодических решений матричного дифференциального уравнения второго порядка типа Ляпунова* // Дифференц. уравнения, 2002. Т. 38, № 8. С. 1133–1134.

4. Ливинская В. А. *К построению периодических решений матричного уравнения Ляпунова второго порядка с параметром* // XVI Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–2014): тез. докл. Междунар. науч. конф. 2014. Ч. 1. С. 66–67.

5. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 1998.