О ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА–РИККАТИ С ПАРАМЕТРОМ

О.А. Маковецкая

Рассматривается задача [1]:

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + \lambda XQ(t)X + F(t,X), \tag{1}$$

$$X(0) = X(\omega), \tag{2}$$

где $(t,X) \in I \times \mathbb{R}^{n\times n}$, $A,B,Q \in \mathbb{C}(I,\mathbb{R}^{n\times n})$, $F \in \mathbb{C}(D_{\tilde\rho},\mathbb{R}^{n\times n})$; $I = [0,\omega]$, $D_{\tilde\rho} = \{(t,X) : t \in I, \ \|X\| < \tilde\rho\}$; $\omega > 0$, $0 < \tilde\rho \leqslant \infty$. Предполагается, что функция $F(t,X)$ удовлетворяет условию Липшица по X локально в $D_{\tilde\rho}$, $F(t,0) \not\equiv 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

В работе [1], являющейся продолжением и развитием [2], с помощью метода [3, гл. 3] получены конструктивные достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1), (2), оценка области локализации и итерационный алгоритм построения решения, основанный на явной вычислительной схеме

$$\begin{aligned} X_{k+1}(t) = \tilde A^{-1}(\omega)\Bigg\{ \int_0^t \bigg(\int_0^\tau A(\sigma)\,d\sigma\bigg)[A(\tau)X_k(\tau) + X_{k-1}(\tau)B(\tau) + {}\\ + \lambda X_{k-1}(\tau)Q(\tau)X_{k-1}(\tau) + F(\tau, X_{k-1}(\tau))]\,d\tau - {}\\ - \int_t^\omega \bigg(\int_\tau^\omega A(\sigma)d\sigma\bigg)[A(\tau)X_k(\tau) + X_{k-1}(\tau)B(\tau) + \lambda X_{k-1}(\tau)Q(\tau)X_{k-1}(\tau) + F(\tau, X_{k-1}(\tau))]\,d\tau - {}\\ - \int_0^\omega [X_k(\tau)B(\tau) + \lambda X_k(\tau)Q(\tau)X_k(\tau) + F(\tau, X_k(\tau))]\,d\tau\Bigg\}, \quad k = 1,2,\ldots, \end{aligned} \tag{3}$$

при этом все приближенные решения удовлетворяют условию (2); здесь $X_0 = 0$, $X_1 = -\tilde A^{-1}(\omega)\int_0^\omega F(\tau,0)\,d\tau$.

В настоящей работе предлагается итерационный алгоритм с неявной вычислительной схемой построения решения этой задачи. В ней используются следующие обозначения [1]:

$$D_\rho=\{(t,X):t\in I,\quad \|X\|\leqslant\rho\},\quad \tilde{A}(\omega)=\int\limits_0^\omega A(\tau)\,d\tau,\quad \gamma=\|\tilde{A}^{-1}(\omega)\|,\quad \alpha=\max_t\|A(t)\|,$$

$$\varepsilon=|\lambda|,\quad \beta=\max_t\|B(t)\|,\quad \delta=\max_t\|Q(t)\|,\quad h=\max_t\|F(t,0)\|,\quad \|X\|_{\mathbb{C}}=\max_t\|X(t)\|,$$

$$\varphi(\rho)=\varepsilon\gamma\delta\omega\left(1+\frac{1}{2}\alpha\omega\right)\rho^2+\gamma\omega\left[\beta+L+\frac{1}{2}\alpha\omega(\alpha+\beta+L)\right]\rho+\gamma\omega h\left(1+\frac{1}{2}\alpha\omega\right),$$

$$q(\rho)=\varepsilon\gamma\delta\omega(\alpha\omega+2)\rho+\frac{1}{2}\gamma\alpha\omega^2(\alpha+\beta+L)+\gamma\omega(\beta+L),$$

где $0<\rho<\tilde{\rho},\ t\in I,\ L=L(\rho)>0$ — постоянная Липшица для $F(t,X)$ в D_ρ, $\|\cdot\|$ — согласованная норма матриц.

Теорема. *Пусть выполнены условия:* $\det\tilde{A}(\omega)\neq0,\ \ \varphi(\rho)\leqslant\rho,\ \ q(\rho)<1.$ *Тогда в области* D_ρ *задача* (1), (2) *однозначно разрешима; решение* $X(t)$ *представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, удовлетворяющих условию* (2), *при этом справедлива оценка* $\|X\|_{\mathbb{C}}\leqslant\varphi(\rho)$.

Алгоритм построения решения задачи представляет собой рекуррентное интегральное соотношение неявного типа:

$$X_k(t)=\tilde{A}^{-1}(\omega)\Bigg\{\int\limits_0^t\Bigg(\int\limits_0^\tau A(\sigma)\,d\sigma\Bigg)[A(\tau)X_{k-1}(\tau)+X_{k-1}(\tau)B(\tau)+$$

$$+\lambda X_{k-1}(\tau)Q(\tau)X_{k-1}(\tau)+F(\tau,X_{k-1}(\tau))]\,d\tau-$$

$$-\int\limits_t^\omega\Bigg(\int\limits_\tau^\omega A(\sigma)d\sigma\Bigg)[A(\tau)X_{k-1}(\tau)+X_{k-1}(\tau)B(\tau)+\lambda X_{k-1}(\tau)Q(\tau)X_{k-1}(\tau)+F(\tau,X_{k-1}(\tau))]\,d\tau-$$

$$-\int\limits_0^\omega[X_k(\tau)B(\tau)+\lambda X_k(\tau)Q(\tau)X_k(\tau)+F(\tau,X_k(\tau))]\,d\tau\Bigg\},\quad k=1,2,\ldots,\qquad(4)$$

где в качестве начального приближения $X_0(\|X_0\|\leqslant\rho)$ принята постоянная матрица, определяемая из уравнения $C=-\tilde{A}^{-1}(\omega)\int_0^\omega[CB(\tau)+\lambda CQ(\tau)C+F(\tau,C)]\,d\tau$.

Установлено, что алгоритм (4) сходится быстрее алгоритма (3).

Литература

1. Маковецкая О.А. *О периодической краевой задаче для матричного уравнения Ляпунова — Риккати с параметром* // VII Международная математическая конференция по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения–2017): тез. докл. Междунар. науч. конф., Минск, 6–10 мая 2017 г. Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 2017. Ч. 1. С. 53.

2. Лаптинский В.Н., Маковецкая О. А. *Конструктивный анализ периодической краевой задачи для матричного дифференциального уравнения Ляпунова — Риккати (левосторонняя регуляризация).* Могилёв: Белорусско-Российский университет, 2011. 56 с. (Препринт / ИТМ НАН Беларуси, № 27).

3. Лаптинский В.Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 1998.