К РАЗРЕШИМОСТИ И ПОСТРОЕНИЮ РЕШЕНИЯ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНО ВОЗМУЩЕННОГО МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА

И.И. Маковецкий

Рассматривается краевая задача

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + F(t,X) + \lambda G(t,X), \quad X \in \mathbb{R}^{n\times n}, \tag{1}$$

$$MX(0) + NX(\omega) = 0, \tag{2}$$

где $A, B \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, $F, G \in \mathbb{C}(D_{\tilde\rho}, \mathbb{R}^{n\times n})$, $I = [0, \omega]$, $D_{\tilde\rho} = \{(t, X) : t \in I,\ \|X\| < \tilde\rho\}$, $\omega > 0$, $0 < \tilde\rho \leqslant \infty$, M, N — постоянные $(n\times n)$-матрицы; функции $F(t,X)$, $G(t,X)$ удовлетворяют в $D_{\tilde\rho}$ относительно X условию Липшица (локально); $F(t,0) \not\equiv 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

В [1] с помощью метода [2] получены конструктивные достаточные условия однозначной разрешимости и алгоритм построения решения невозмущенной задачи (1), (2). Данная работа является продолжением [1] и развитием [3, 4]; в уравнении (1) принято возмущение типа [5].

Примем следующие обозначения:

$$D_\rho = \{(t,X) : t \in I, \|X\| \leqslant \rho\}, \quad \lambda_1 = \max_t \|U(t)\|, \quad \lambda_2 = \max_t \|U^{-1}(t)\|,$$

$$\mu_1 = \max_t \|V(t)\|, \quad \mu_2 = \max_t \|V^{-1}(t)\|, \quad P = U^{-1}(\omega)N^{-1}M, Q = -V(\omega), \quad \gamma = \|\Phi^{-1}\|,$$

$$m = \max\{\|P\|, \|Q\|\}, \quad q = \gamma\lambda\mu m\omega(L_1 + \varepsilon L_2), \quad p = \gamma\lambda\mu m\omega(h_1 + \varepsilon h_2),$$

$$\varepsilon = |\lambda|, \quad h_1 = \max_t \|F(t,0)\|, \quad h_2 = \max_t \|G(t,0)\|, \quad \|X\|_{\mathbb{C}} = \max_t \|X(t)\|,$$

где $t \in I$, $\mu = \mu_1\mu_2$, $\lambda = \lambda_1\lambda_2$, Φ — линейный оператор, $\Phi X = PX - XQ$, $L_1 = L_1(\rho) > 0$, $L_2 = L_2(\rho) > 0$ — постоянные Липшица для функций соответственно $F(t,X)$, $G(t,X)$ в D_ρ, $0 < \rho < \tilde\rho$, $\|\cdot\|$ — согласованная норма матриц; $U(t), V(t)$ – решения уравнений

$$\frac{dU}{dt} = A(t)U, \quad U(0) = E;$$

$$\frac{dV}{dt} = VB(t), \quad V(0) = E,$$

здесь E – единичная матрица.

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $\det N \neq 0$;
2) *матрицы* P, Q *не имеют общих характеристических чисел;*
3) $q < 1$;
4) $p/(1-q) \leqslant \rho$.

Тогда в области D_ρ *задача* (1), (2) *однозначно разрешима, ее решение представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением*

$$X_{k+1}(t) = U(t)\Phi^{-1}\Big[P\int_0^t U^{-1}(\tau)(F(\tau, X_k(\tau)) + \lambda G(\tau, X_k(\tau)))V^{-1}(\tau)\,d\tau +$$

$$+\int\limits_t^\omega U^{-1}(\tau)(F(\tau,X_k(\tau))+\lambda G(\tau,X_k(\tau)))V^{-1}(\tau)\,d\tau Q\Bigg]V(t),\quad k=0,1,2,\ldots,$$

при этом справедлива оценка

$$\|X_k-X\|_{\mathbb{C}}\leqslant q^k\frac{\|X_1-X_0\|_{\mathbb{C}}}{1-q},\quad k=0,1,2,\ldots$$

Здесь $X_0(t)$ – *произвольная матрица класса* $\mathbb{C}(I,\mathbb{R}^{n\times n})$, *принадлежащая области* D_ρ.

Литература

1. Лаптинский В.Н., Маковецкий И.И. *К конструктивному анализу двухточечной краевой задачи для нелинейного уравнения Ляпунова* // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 7. С. 994–996.

2. Лаптинский В.Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 1998.

3. Лаптинский В.Н., Маковецкий И.И., Пугин В.В. *Матричные дифференциальные уравнения Ляпунова и Риккати.* Могилёв: Белорус.-Рос. ун-т, 2012.

4. Маковецкий И.И. *О разрешимости и построении решения двухточечной краевой задачи для нелинейного матричного уравнения Ляпунова с параметрами* // XVII Международная математическая конференция по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения–2017): тез. докладов Междунар. науч. конф., Минск, 6–10 мая 2017 г. Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 2017. Ч. 1. С. 54.

5. Плисс В. А. *Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений.* М.: Наука, 1977.

УСЛОВИЯ ЦЕНТРА ДЛЯ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

В.И. Мироненко

Теорема. *Пусть* $2\pi-$ *периодические функции* $\alpha_0(\varphi)$ *и* $\alpha_1(\varphi)$ *непрерывны и нечетны, а* 2π *-периодические функции* $e_0(\varphi)$ *и* $e_1(\varphi)$ *непрерывны и четны, причем* 2π *-периодическая функция* $m(\varphi)$ *имеет производную* $\dot m(\varphi)$. *Тогда для дифференциального уравнения*

$$\frac{dr}{d\varphi}=r^3\frac{\dot m-(\alpha_0+\alpha_1)r+[\dot m(2m+e_0+e_1)-\alpha_1 m]r^2+m(\dot m e_1+\alpha_0+\alpha_1)r^3+m^2(\dot m+\alpha_1)r^4}{[1-mr^2][1+(2m+e_1+e_0)r^2+me_1r^3+m^2r^4]}$$

начало координат $r=0$ *является центром.*

Доказательство использует тот факт, что отражающая функция [1] этого уравнения задается формулой

$$m(-\varphi)F+\frac{1}{F}=m(\varphi)r+\frac{1}{r}.$$

Литература

1. Мироненко В.И. *Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем.* Гомель: ГГУ, 2004.