

МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Основы проектирования машин»

# ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

*Методические рекомендации к практическим занятиям  
для студентов специальностей 1-36 01 01 «Технология  
машиностроения», 1-37 01 02 «Автомобилестроение  
(по направлениям)», 1-53 01 01 «Автоматизация технологических  
процессов и производств (по направлениям)»*



Могилев 2019

УДК 621.01  
ББК 34.41  
Т 33

Рекомендовано к изданию  
учебно-методическим отделом  
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Основы проектирования машин» «09» апреля 2019 г.,  
протокол № 10

Составитель канд. техн. наук О. В. Пузанова

Рецензент канд. техн. наук, доц. М. И. Миронова

Изложены цель, задачи, содержание и порядок выполнения  
практических занятий.

Учебно-методическое издание

## ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

Ответственный за выпуск	А. П. Прудников
Технический редактор	А. А. Подошевка
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.  
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 66 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:  
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования  
«Белорусско-Российский университет».

Свидетельство о государственной регистрации издателя,  
изготовителя, распространителя печатных изданий  
№ 1/156 от 07.03.2019.

Пр-т Мира, 43, 212022, Могилев.

© Белорусско-Российский  
университет, 2019



## Содержание

Введение.....	4
Практические занятия № 1–2. Виды кинематических пар.	
Структурный анализ механизмов.....	5
Практические занятия № 3–5. Построение планов скоростей и ускорений рычажных механизмов. Метод кинематических диаграмм.....	17
Практические занятия № 6–7. Метод планов сил. Силовой анализ рычажных механизмов методом рычага Жуковского.....	30
Практические занятия № 8–12. Определение геометрических параметров зубчатого колеса. Кинематический анализ рядового зубчатого механизма. Аналитический метод кинематического исследования планетарного механизма. Графический метод кинематического исследования планетарного механизма.	
Синтез планетарного механизма .....	37
Практические занятия № 13–15. Графический метод анализа кулачковых механизмов с толкателем. Графический метод анализа кулачковых механизмов с коромыслом. Синтез кулачковых механизмов.....	46
Список литературы .....	48



## Введение

Методические рекомендации составлены в соответствии с рабочими программами по курсу «Теория механизмов и машин» для студентов специальностей 1-36 01 01 «Технология машиностроения», 1-37 01 02 «Автомобилестроение (по направлениям)», 1-53 01 01 «Автоматизация технологических процессов и производств (по направлениям)».

Целью учебной дисциплины является формирование специалистов, умеющих обоснованно и результативно применять существующие технические решения, технические средства и технологии для их реализации, предлагать более эффективные технические решения, а также воспринимать и осваивать новые научно-техническую информацию и опыт решения задач машиностроения.

Студент, изучивший дисциплину:

– **познает:**

- а) основные теоретические положения строения, кинематики, динамики и управления системами машин, отдельными машинами и механизмами;
- б) измерительную аппаратуру для определения кинематических и динамических параметров механизмов и машин;
- в) принципы проектирования основных видов механизмов;

– **научится:**

- а) составлять расчетные схемы (модели) машин и механизмов, пригодные для решения технических задач, выполнения кинематических и динамических расчетов, применять результаты расчетов для получения оптимальных характеристик механизмов и машин;
- б) разрабатывать алгоритмы программ расчета параметров на ПК, выполнять конкретные расчеты;

– **овладеет:**

- а) основными принципами проектирования, анализа и синтеза различных механизмов;
- б) методами проектирования основных видов механизмов;
- в) методами расчета динамической нагруженности машин и механизмов.

Целью методических рекомендаций является помощь студентам при выполнении практических работ по дисциплине «Теория механизмов и машин».

## Практические занятия № 1–2. Виды кинематических пар. Структурный анализ механизмов


### Теоретические основы практических занятий

**Механизмом** называется система тел, предназначенная для преобразования движения одного или нескольких тел в требуемые движения других тел.

Механизм состоит из звеньев. **Звеном** называется одна деталь механизма или несколько деталей, жестко связанных между собой. Звено, относительно которого изучается движение остальных звеньев, называется **стойкой**. Звено, которому сообщается движение, называется **входным**. Звено, совершающее движение, для реализации которого создан механизм, называется **выходным**.

**Кинематическая пара** – соединение звеньев, допускающее их относительное движение. Кинематические пары бывают высшие и низшие. В **низших** парах звенья соприкасаются по поверхностям, а в **высших** – по линиям или в точках. По числу допускаемых относительных движений соединяемых звеньев, кинематические пары бывают **одно-, двух-, трех-, четырех- и пятиподвижные**. По числу связей, накладываемых на относительное движение соединяемых звеньев, кинематические пары бывают **первого, второго, третьего, четвертого и пятого классов  $S$**  (таблица 1).

Таблица 1 – Классификация кинематических пар

Подвижность $W$	Класс $S$	Название	Схема	Условное обозначение
3	3	Сферическая		
2	4	Сферическая с пальцем		
2	4	Цилиндрическая		
1	5	Вращательная		 
1	5	Поступательная		
1	5	Винтовая		

**Кинематическая цепь** – это система звеньев, образующих между собой кинематические пары. Механизм – это кинематическая цепь, в которой указаны стойка, входные и выходные звенья. Число степеней свободы пространственного механизма определяется по формуле Сомова–Малышева

$$W = 6n - 5p_1 - 4p_2 - 3p_3 - 2p_4 - p_5, \quad (1)$$

где  $n$  – число подвижных звеньев;

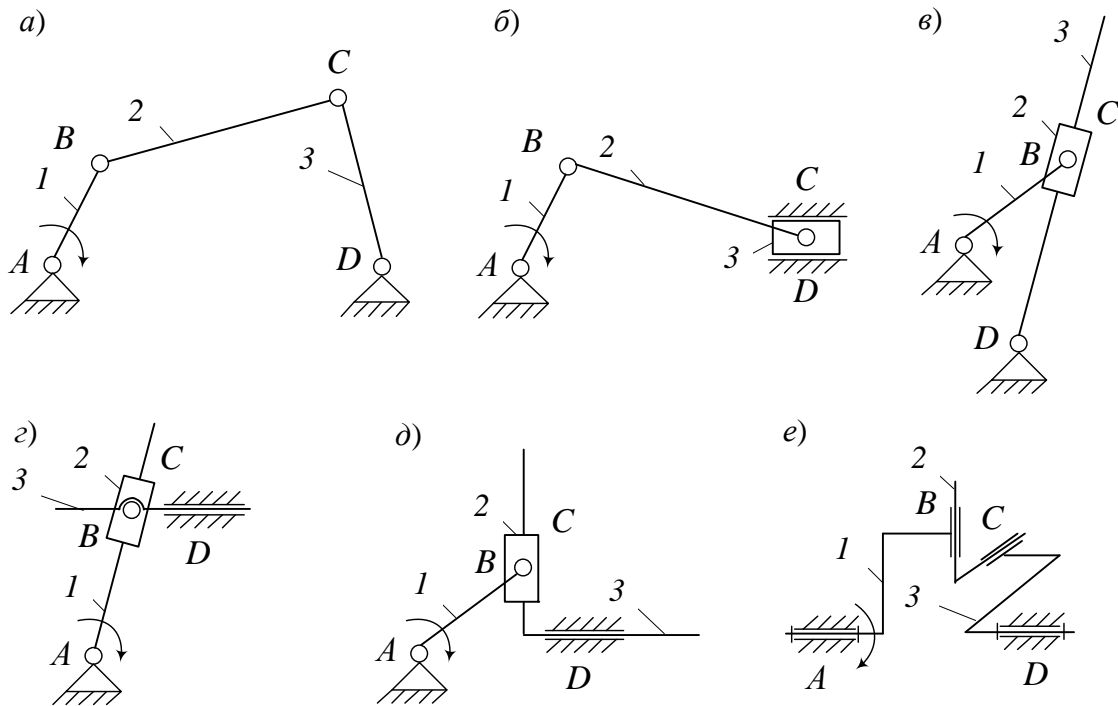
$p_1, p_2, \dots, p_5$  – число подвижных пар.

Если все звенья механизма движутся в плоскости, то (1) преобразуется в формулу Чебышева:

$$W = 3n - 2p_1 - p_2. \quad (2)$$

Число степеней свободы  $W$  равно числу обобщенных координат, т. е. числу независимых между собой параметров, однозначно определяющих положение всех звеньев механизма. Чаще всего применяют механизмы с  $W = 1$ . Звенья, за которыми закреплены обобщенные координаты, называют **начальными**.

Существуют различные виды механизмов: рычажные, зубчатые, кулачковые, фрикционные и др. Механизмы, звенья которых образуют только низшие пары, называются **рычажными**. На рисунке 1 приведены основные виды простейших рычажных механизмов. Их звенья обозначают цифрами. Звенья имеют специальные названия.



$a$  – шарнирный четырехзвенник;  $b$  – кривошипно-ползунный;  $c$  – кулисный;  $d$  – тангенсный;  $e$  – крестовая муфта (механизм Ольдгейма)

Рисунок 1 – Основные виды рычажных механизмов

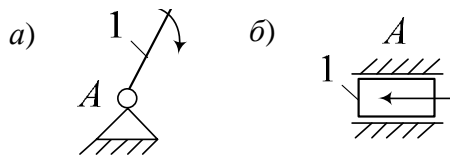
Кривошип  $1$  на рисунке 1 – звено, совершающее полный оборот вокруг неподвижной оси. **Коромысло**  $3$  на рисунке 1,  $a$  – звено, совершающее неполный оборот вокруг неподвижной оси. Шатун  $2$  на рисунке 1,  $a$  и  $b$  – звено рычажного механизма, не образующее кинематической пары со стойкой. Кулиса  $3$  на рисунке 1,  $c$  – звено рычажного механизма, совершающее вращательное движение и образующее с другим звеном (кулисным камнем  $2$  на рисунке 1,  $c$ ) поступа-

тельную кинематическую пару. Ползун 3 на рисунке 1, б – звено рычажного механизма, совершающее прямолинейно-поступательное движение. Кинематические пары обозначают прописными латинскими буквами. Неподвижное звено (стойка) отмечается штриховкой, не обозначается, но подразумевается, что оно имеет обозначение «ноль». Основные виды рычажных механизмов приведены на рисунке 1.

Распространена структурная классификация рычажных механизмов, предложенная Л. В. Ассуром и И. И. Артоболовским, согласно которой каждый механизм с одной степенью свободы  $W = 1$  можно считать состоящим из механизма первого класса и присоединенных к нему структурных групп.

**Механизм первого класса** представляет собой ведущее звено, соединенное со стойкой посредством кинематической пары. Обозначается на схеме стрелкой, указывающей направление его движения (рисунок 2).

**Структурной группой** (группой Ассура) называется такая кинематическая



а – кривошип со стойкой; б – ползун со стойкой

цепь, которая после присоединения к стойке имеет нулевую степень подвижности  $W = 0$ , поэтому после присоединения этой группы к звеньям механизма его степень подвижности не изменяется. Из формулы (2) для структурной группы

$$0 = 3n - 2p_1, \quad p_1 = 1,5n. \quad (3)$$

Рисунок 2 – Механизмы I класса

В таблице 2 представлены основные структурные группы. Структурная группа, у которой  $p_1 = 3$ ,  $n = 2$ , называется **диадой**.

Таблица 2 – Основные структурные группы

$n$	$p_1$	Схема структурной группы				
2	3					
4	6					

### Задания для самостоятельного выполнения.

Определить степень подвижности пространственного рычажного механизма (таблица 3), выполнить структурный анализ плоского рычажного механизма (таблица 4), определить подвижность кинематических пар (рисунок 3).

Таблица 3 – Схемы пространственных рычажных механизмов

Вариант	Схема	Вариант	Схема	Вариант	Схема
1		8		15	
2		9		16	
3		10		17	
4		11		18	
5		12		19	
6		13		20	
7		14		21	

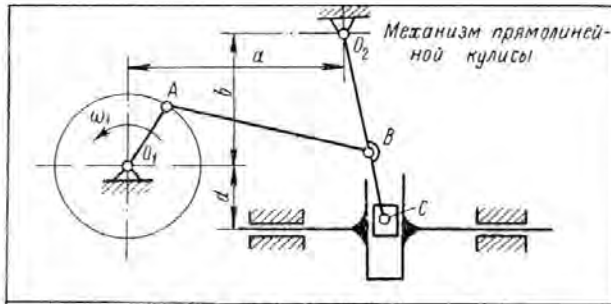


Таблица 4 – Схемы плоских рычажных механизмов

<p>Механизм прессы</p>		<p>Механизм насоса</p>																																																																																	
<p>Задание №1 Ж</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th><math>O_1A</math></th> <th><math>AB</math></th> <th><math>O_2C</math></th> <th><math>CD</math></th> <th><math>a</math></th> <th><math>b</math></th> <th><math>d</math></th> <th><math>n_1</math></th> </tr> <tr> <th></th> <th colspan="7">мм</th> <th>об/мин</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>100</td> <td>250</td> <td>275</td> <td>140</td> <td>375</td> <td>240</td> <td>175</td> <td>60</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>200</td> <td>300</td> <td>350</td> <td>300</td> <td>600</td> <td>450</td> <td>350</td> <td>90</td> </tr> </tbody> </table>			$O_1A$	$AB$	$O_2C$	$CD$	$a$	$b$	$d$	$n_1$		мм							об/мин	1	100	250	275	140	375	240	175	60	2	200	300	350	300	600	450	350	90	<p>Задание №2 Ж</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th><math>O_1A</math></th> <th><math>AB</math></th> <th><math>O_2C</math></th> <th><math>CD</math></th> <th><math>a</math></th> <th><math>b</math></th> <th><math>d</math></th> <th><math>n_1</math></th> </tr> <tr> <th></th> <th colspan="7">мм</th> <th>об/мин</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>120</td> <td>480</td> <td>500</td> <td>240</td> <td>240</td> <td>200</td> <td>400</td> <td>300</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>150</td> <td>400</td> <td>600</td> <td>350</td> <td>400</td> <td>300</td> <td>300</td> <td>300</td> </tr> </tbody> </table>			$O_1A$	$AB$	$O_2C$	$CD$	$a$	$b$	$d$	$n_1$		мм							об/мин	1	120	480	500	240	240	200	400	300	2	150	400	600	350	400	300	300	300								
	$O_1A$	$AB$	$O_2C$	$CD$	$a$	$b$	$d$	$n_1$																																																																											
	мм							об/мин																																																																											
1	100	250	275	140	375	240	175	60																																																																											
2	200	300	350	300	600	450	350	90																																																																											
	$O_1A$	$AB$	$O_2C$	$CD$	$a$	$b$	$d$	$n_1$																																																																											
	мм							об/мин																																																																											
1	120	480	500	240	240	200	400	300																																																																											
2	150	400	600	350	400	300	300	300																																																																											
<p>Механизм шпинга</p>		<p>Механизм подачи сварочной машины</p>																																																																																	
<p>Задание №3 Ж</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th><math>O_1A</math></th> <th><math>O_2B</math></th> <th><math>BC</math></th> <th><math>a</math></th> <th><math>b</math></th> <th><math>d</math></th> <th><math>n_1</math></th> </tr> <tr> <th></th> <th colspan="6">мм</th> <th>об/мин</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>150</td> <td>660</td> <td>280</td> <td>340</td> <td>390</td> <td>60</td> <td>60</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>100</td> <td>440</td> <td>175</td> <td>225</td> <td>260</td> <td>120</td> <td>120</td> </tr> </tbody> </table>			$O_1A$	$O_2B$	$BC$	$a$	$b$	$d$	$n_1$		мм						об/мин	1	150	660	280	340	390	60	60	2	100	440	175	225	260	120	120	<p>Задание №4 Ж</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th><math>O_1A</math></th> <th><math>AB</math></th> <th><math>O_2B</math></th> <th><math>a</math></th> <th><math>b</math></th> <th><math>d</math></th> <th><math>n_1</math></th> </tr> <tr> <th></th> <th colspan="6">мм</th> <th>об/мин</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>60</td> <td>240</td> <td>168</td> <td>102</td> <td>225</td> <td>144</td> <td>240</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>100</td> <td>400</td> <td>280</td> <td>170</td> <td>375</td> <td>240</td> <td>120</td> </tr> </tbody> </table>			$O_1A$	$AB$	$O_2B$	$a$	$b$	$d$	$n_1$		мм						об/мин	1	60	240	168	102	225	144	240	2	100	400	280	170	375	240	120																
	$O_1A$	$O_2B$	$BC$	$a$	$b$	$d$	$n_1$																																																																												
	мм						об/мин																																																																												
1	150	660	280	340	390	60	60																																																																												
2	100	440	175	225	260	120	120																																																																												
	$O_1A$	$AB$	$O_2B$	$a$	$b$	$d$	$n_1$																																																																												
	мм						об/мин																																																																												
1	60	240	168	102	225	144	240																																																																												
2	100	400	280	170	375	240	120																																																																												
<p>Двухкривошипный механизм</p>		<p>Механизм прессы</p>																																																																																	
<p>Задание №5 Ж</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th><math>O_1A</math></th> <th><math>AB</math></th> <th><math>BO_2</math></th> <th><math>BC</math></th> <th><math>CD</math></th> <th><math>a</math></th> <th><math>b</math></th> <th><math>d</math></th> <th><math>n_1</math></th> </tr> <tr> <th></th> <th colspan="8">мм</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>160</td> <td>260</td> <td>260</td> <td>80</td> <td>800</td> <td>50</td> <td>40</td> <td>800</td> <td>800</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>240</td> <td>340</td> <td>340</td> <td>170</td> <td>1700</td> <td>100</td> <td>85</td> <td>350</td> <td>350</td> </tr> </tbody> </table>			$O_1A$	$AB$	$BO_2$	$BC$	$CD$	$a$	$b$	$d$	$n_1$		мм								1	160	260	260	80	800	50	40	800	800	2	240	340	340	170	1700	100	85	350	350	<p>Задание №6 Ж</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th><math>O_1A</math></th> <th><math>AC</math></th> <th><math>AB</math></th> <th><math>BO_2</math></th> <th><math>BC</math></th> <th><math>a</math></th> <th><math>b</math></th> <th><math>d</math></th> <th><math>n_1</math></th> </tr> <tr> <th></th> <th colspan="9">мм</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>150</td> <td>480</td> <td>640</td> <td>600</td> <td>600</td> <td>400</td> <td>500</td> <td>600</td> <td>180</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>120</td> <td>350</td> <td>500</td> <td>500</td> <td>450</td> <td>280</td> <td>450</td> <td>400</td> <td>240</td> </tr> </tbody> </table>			$O_1A$	$AC$	$AB$	$BO_2$	$BC$	$a$	$b$	$d$	$n_1$		мм									1	150	480	640	600	600	400	500	600	180	2	120	350	500	500	450	280	450	400	240	
	$O_1A$	$AB$	$BO_2$	$BC$	$CD$	$a$	$b$	$d$	$n_1$																																																																										
	мм																																																																																		
1	160	260	260	80	800	50	40	800	800																																																																										
2	240	340	340	170	1700	100	85	350	350																																																																										
	$O_1A$	$AC$	$AB$	$BO_2$	$BC$	$a$	$b$	$d$	$n_1$																																																																										
	мм																																																																																		
1	150	480	640	600	600	400	500	600	180																																																																										
2	120	350	500	500	450	280	450	400	240																																																																										
<p>Механизм прессы</p>		<p>Механизм прессы</p>																																																																																	
<p>Задание №7 Ж</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th><math>O_1A</math></th> <th><math>AB</math></th> <th><math>BO_2</math></th> <th><math>CO_2</math></th> <th><math>CD</math></th> <th><math>a</math></th> <th><math>b</math></th> <th><math>d</math></th> <th><math>n_1</math></th> </tr> <tr> <th></th> <th colspan="9">мм</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>140</td> <td>600</td> <td>620</td> <td>320</td> <td>560</td> <td>250</td> <td>420</td> <td>175</td> <td>150</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>100</td> <td>425</td> <td>450</td> <td>250</td> <td>400</td> <td>180</td> <td>300</td> <td>125</td> <td>60</td> </tr> </tbody> </table>			$O_1A$	$AB$	$BO_2$	$CO_2$	$CD$	$a$	$b$	$d$	$n_1$		мм									1	140	600	620	320	560	250	420	175	150	2	100	425	450	250	400	180	300	125	60	<p>Задание №8 Ж</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th><math>O_1A</math></th> <th><math>AB</math></th> <th><math>AC</math></th> <th><math>BD</math></th> <th><math>O_2C</math></th> <th><math>a</math></th> <th><math>b</math></th> <th><math>d</math></th> <th><math>n_1</math></th> </tr> <tr> <th></th> <th colspan="9">мм</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>75</td> <td>300</td> <td>225</td> <td>250</td> <td>150</td> <td>210</td> <td>100</td> <td>40</td> <td>750</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>120</td> <td>480</td> <td>360</td> <td>400</td> <td>240</td> <td>400</td> <td>200</td> <td>60</td> <td>300</td> </tr> </tbody> </table>			$O_1A$	$AB$	$AC$	$BD$	$O_2C$	$a$	$b$	$d$	$n_1$		мм									1	75	300	225	250	150	210	100	40	750	2	120	480	360	400	240	400	200	60	300
	$O_1A$	$AB$	$BO_2$	$CO_2$	$CD$	$a$	$b$	$d$	$n_1$																																																																										
	мм																																																																																		
1	140	600	620	320	560	250	420	175	150																																																																										
2	100	425	450	250	400	180	300	125	60																																																																										
	$O_1A$	$AB$	$AC$	$BD$	$O_2C$	$a$	$b$	$d$	$n_1$																																																																										
	мм																																																																																		
1	75	300	225	250	150	210	100	40	750																																																																										
2	120	480	360	400	240	400	200	60	300																																																																										



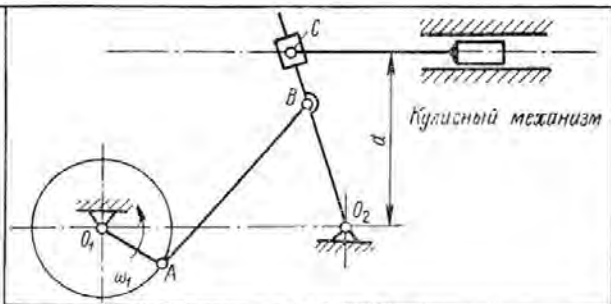
Продолжение таблицы 4



Задание №9 Ж

	$O_1A$	$AB$	$O_2C$	$O_2B$	$a$	$b$	$d$	$n_1$
	мм							об/мин
1	160	545	510	300	500	350	160	180
2	120	410	380	230	370	260	120	240

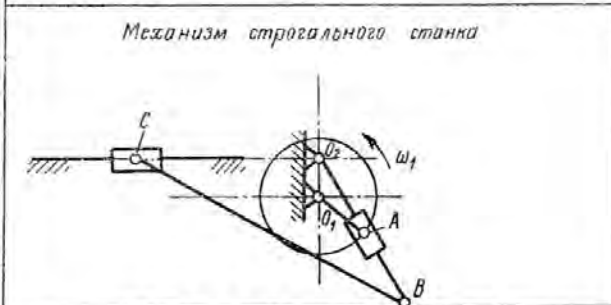
Кафедра ТММ



Задание №10 Ж

	$O_1A$	$AB$	$O_2B$	$O_2O_1$	$a$	$d$	$n_1$
	мм					мм	об/мин
1	40	100	80	100	100	50	
2	40	100	80	100	100	20	

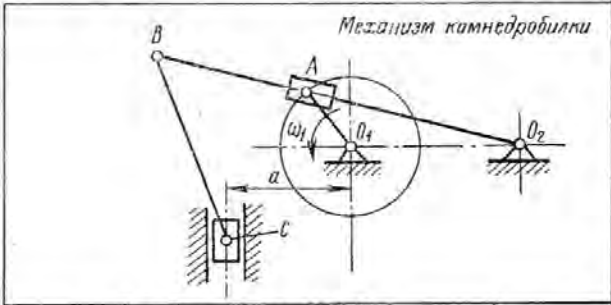
Кафедра ТММ



Задание №11 Ж

	$O_1A$	$O_1O_2$	$O_2B$	$BC$	$n_1$		
	мм				об/мин		
1	200	100	400	900	90		
2	300	100	600	1000	60		

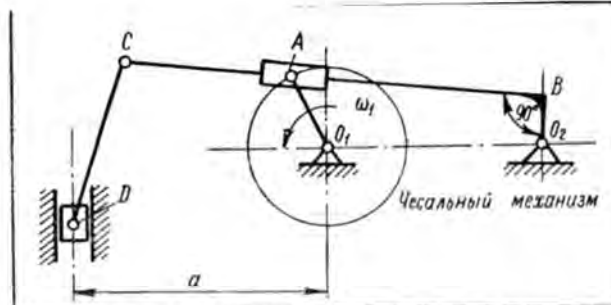
Кафедра ТММ



Задание №12 Ж

	$O_1A$	$O_1O_2$	$O_2B$	$BC$	$a$	$n_1$
	мм					об/мин
1	140	340	840	1000	120	60
2	160	340	840	1000	360	90

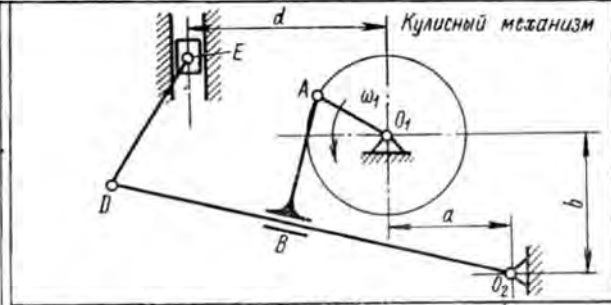
Кафедра ТММ



Задание №13 Ж

	$O_1O_2$	$O_1A$	$O_2B$	$BC$	$CD$	$a$	$n_1$
	мм						об/мин
1	400	200	100	800	1000	500	90
2	400	200	150	900	1200	200	60

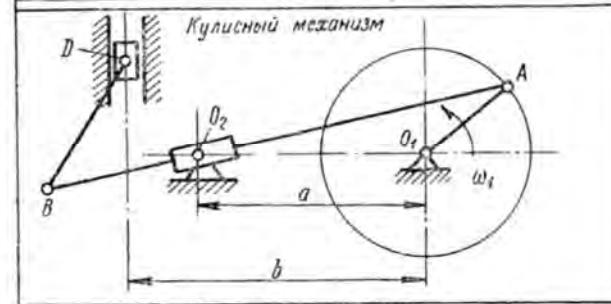
Кафедра ТММ



Задание №14 Ж

	$O_1A$	$AB$	$O_2D$	$DE$	$a$	$b$	$d$	$n_1$
	мм							об/мин
1	150	250	1100	1000	500	200	700	120
2	150	250	1200	1000	500	200	600	90

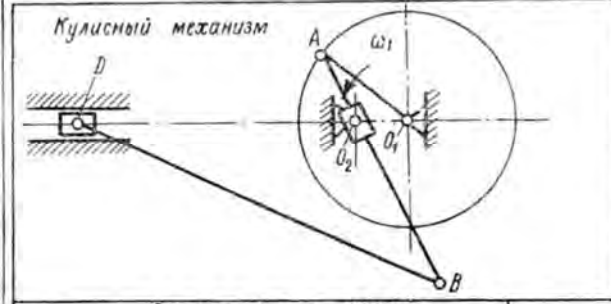
Кафедра ТММ



Задание №15 Ж

	$O_1A$	$AB$	$BD$	$a$	$b$	$n_1$	
	мм						об/мин
1	200	1000	800	500	700	80	
2	200	1000	1000	400	600	120	

Кафедра ТММ



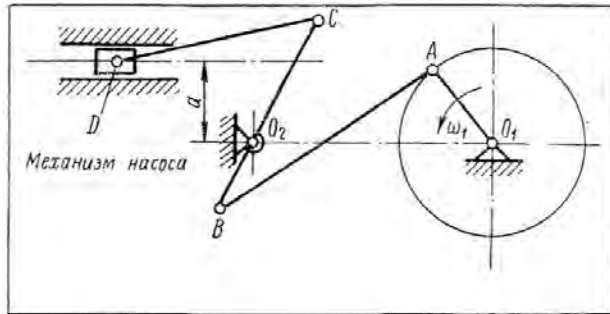
Задание №16 Ж

	$O_1A$	$O_1O_2$	$AB$	$BD$	$n_1$
	мм				об/мин
1	200	100	500	1000	90
2	300	200	800	1000	60

Кафедра ТММ

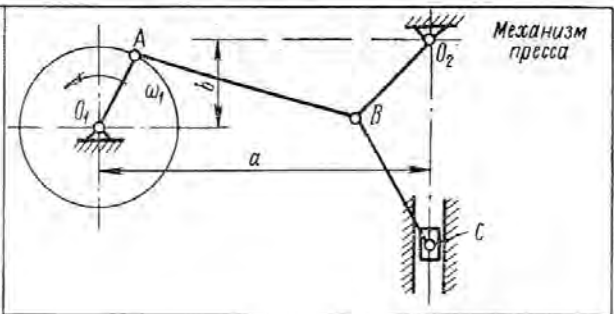


Продолжение таблицы 4



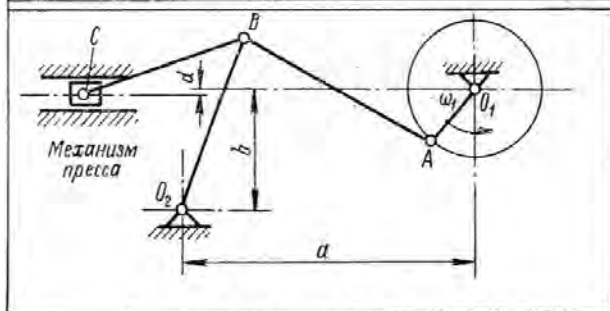
Задание №17ж

	$O_1A$	$O_1O_2$	$AB$	$BO_2$	$O_2C$	$CD$	$a$	$n_1$	
	мм							об/мин	
1	300	900	1000	600	600	1000	200	30	Кафедра ТММ
2	200	800	1000	800	600	800	400	60	



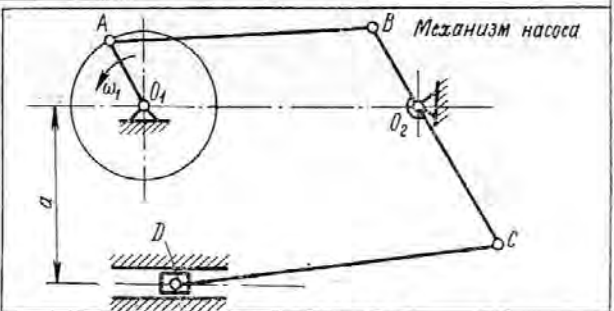
Задание №18ж

	$O_1A$	$AB$	$BO_2$	$BC$	$a$	$b$	$n_1$		
	мм							об/мин	
1	100	300	400	400	400	300	45	Кафедра ТММ	
2	100	400	480	480	500	300	60		



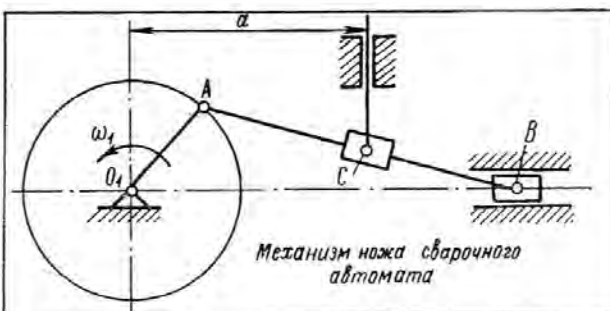
Задание №19ж

	$O_1A$	$AB$	$BO_2$	$BC$	$a$	$b$	$d$	$n_1$	
	мм							об/мин	
1	100	400	300	300	300	150	100	150	Кафедра ТММ
2	250	900	600	600	450	250	150	90	



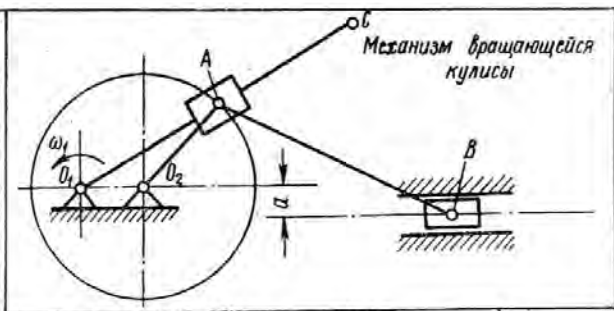
Задание №20ж

	$O_1A$	$AB$	$BO_2$	$O_2C$	$CD$	$a$	$O_1O_2$	$n_1$	
	мм							об/мин	
1	250	400	300	600	600	300	350	120	Кафедра ТММ
2	150	450	400	450	500	200	350	180	



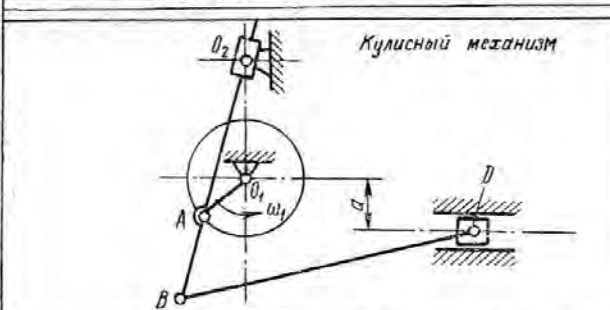
Задание №21ж

	$O_1A$	$AB$	$a$	$n_1$	
	мм			об/мин	
1	200	1000	600	120	Кафедра ТММ
2	200	800	350	150	



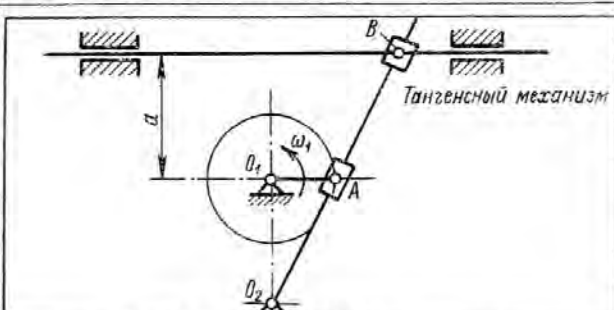
Задание №22ж

	$O_1O_2$	$O_1C$	$O_2A$	$AB$	$a$	$n_1$	
	мм					об/мин	
1	130	600	200	500	50	150	Кафедра ТММ
2	150	600	200	600	100	120	



Задание №23ж

	$O_1A$	$O_1O_2$	$AB$	$BD$	$a$	$n_1$	
	мм					об/мин	
1	200	600	450	900	100	90	Кафедра ТММ
2	150	400	350	600	150	120	

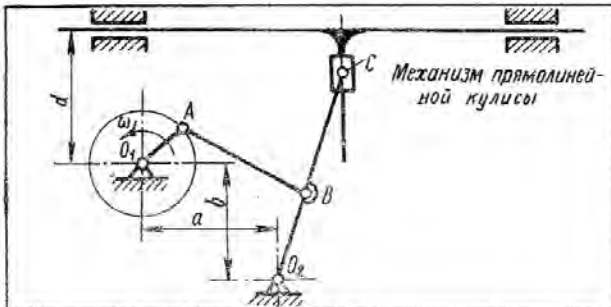


Задание №24ж

	$O_1A$	$O_1O_2$	$a$	$n_1$	
	мм			об/мин	
1	120	420	290	150	Кафедра ТММ
2	150	300	250	120	



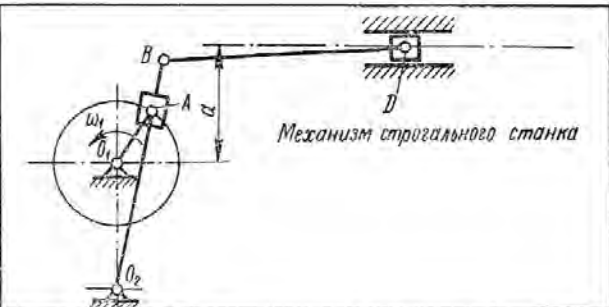
Продолжение таблицы 4



Задание № 25 Ж

	$O_1A$	$AB$	$O_2B$	$O_2C$	$a$	$b$	$d$	$n_1$
	мм							
1	100	450	400	750	350	450	350	100
2	100	450	300	650	400	400	400	150

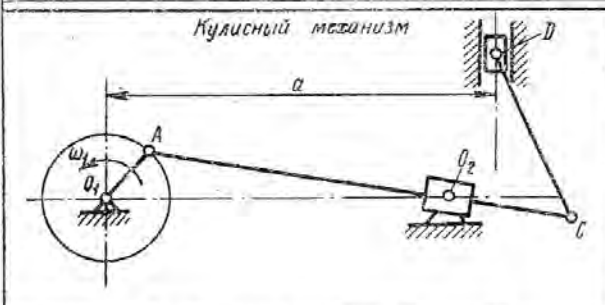
Кафедра ТММ



Задание № 26 Ж

	$O_1A$	$O_1O_2$	$O_2B$	$BD$	$a$	$n_1$
	мм					
1	200	600	900	800	400	150
2	200	400	700	600	400	90

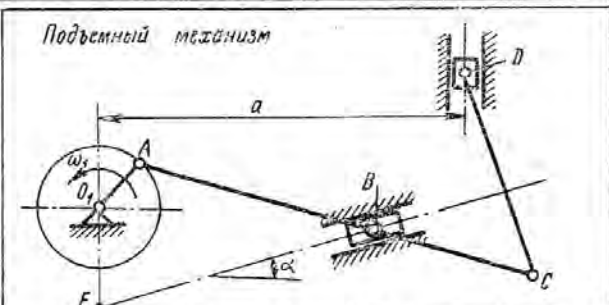
Кафедра ТММ



Задание № 27 Ж

	$O_1A$	$AC$	$O_1O_2$	$CD$	$a$	$n_1$
	мм					
1	200	1200	850	900	800	60
2	250	1200	700	1200	900	120

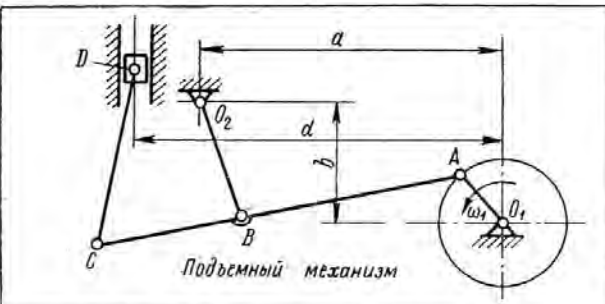
Кафедра ТММ



Задание № 28 Ж

	$O_1A$	$AB$	$AC$	$CD$	$O_1E$	$\alpha$	$a$	$n_1$	
	мм						град	мм	об/мин
1	90	312	540	400	132	15	480	120	
2	150	520	900	600	220	20	600	90	

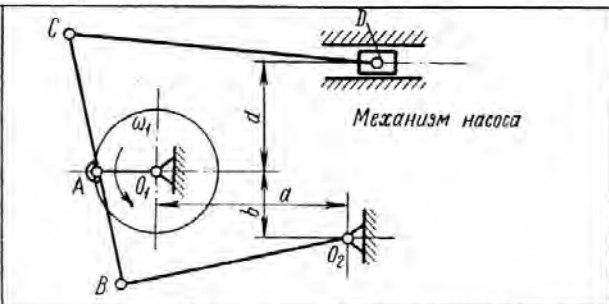
Кафедра ТММ



Задание № 29 Ж

	$O_1A$	$AB$	$AC$	$O_2B$	$CD$	$a$	$b$	$d$	$n_1$
	мм								
1	300	1300	2250	900	1450	1650	700	1800	150
2	150	800	1000	600	950	750	300	900	200

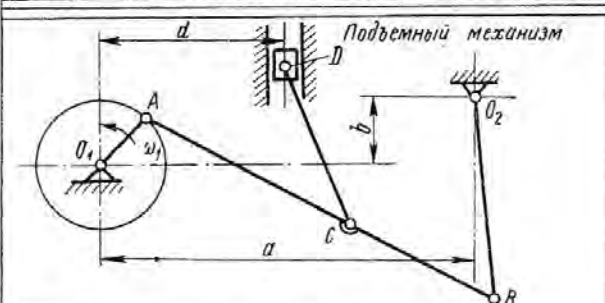
Кафедра ТММ



Задание № 30 Ж

	$O_1A$	$AB$	$AC$	$BO_2$	$CD$	$a$	$b$	$d$	$n_1$
	мм								
1	100	200	200	450	620	420	120	200	150
2	180	460	460	500	820	280	380	370	100

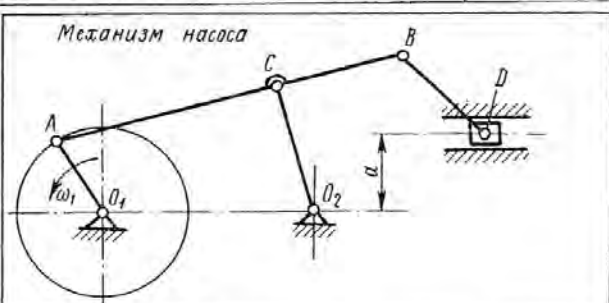
Кафедра ТММ



Задание № 31 Ж

	$O_1A$	$AB$	$AC$	$BO_2$	$CD$	$a$	$b$	$d$	$n_1$
	мм								
1	200	1000	600	600	700	950	250	300	90
2	200	1000	700	600	700	800	250	350	180

Кафедра ТММ



Задание № 32 Ж

	$O_1A$	$AB$	$AC$	$CO_2$	$BD$	$O_1O_2$	$a$	$n_1$
	мм							
1	300	1500	750	750	1200	600	400	120
2	250	1200	600	600	1000	600	200	180

Кафедра ТММ



Окончание таблицы 4

Механизм стола печатной машины

Задание №33 Ж

	$O_1A$	$AB$	$AC$	$CD$	$n_1$	
	мм				об/мин	
1	300	500	1200	1000	60	Кафедра ТММ
2	250	400	1000	800	120	

Механизм накатки краски печатной машины

Задание №34 Ж

	$O_1A$	$AB$	$AC$	$CD$	$n_1$	
	мм				об/мин	
1	300	750	400	750	60	Кафедра ТММ
2	250	600	350	600	120	

Механизм стола печатной машины

Задание №35 Ж

	$O_1A$	$AE$	$AB$	$BO_2$	$O_2M$	$O_1O_2$	$BD$	$n_1$	
	мм							об/мин	
1	300	380	760	300	380	760	700	140	Кафедра ТММ
2	200	250	500	200	250	500	500	200	

Двухкривошипный механизм

Задание №36 Ж

	$O_1A$	$AB$	$O_2B$	$BC$	$a$	$b$	$n_1$	
	мм						об/мин	
1	100	120	120	480	25	30	100	Кафедра ТММ
2	120	150	150	500	30	30	90	

V образный двигатель

Задание №37 Ж

	$O_1A$	$AB$	$AC$	$CD$	$n_1$	
	мм				об/мин	
1	90	315	70	315	1800	Кафедра ТММ
2	120	420	90	420	1500	

Механизм насоса

Задание №38 Ж

	$O_1A$	$AB$	$BC$	$BO_2$	$CD$	$a$	$b$	$n_1$	
	мм								
1	200	500	230	690	690	500	320	120	Кафедра ТММ
2	150	375	180	600	600	375	230	180	

Двухкривошипный механизм

Задание №39 Ж

	$O_1A$	$AB$	$BC$	$CO_2$	$CD$	$a$	$b$	$d$	$n_1$	
	мм									
1	40	50	20	45	160	6	8	60	300	Кафедра ТММ
2	100	125	40	120	400	15	20	150	200	

Механизм двигателя с компрессором

Задание №40 Ж

	$O_1A$	$AB$	$AC$	$BC$	$CD$	$a$	$n_1$	
	мм						об/мин	
1	150	500	350	350	400	250	240	Кафедра ТММ
2	120	420	275	275	350	270	300	



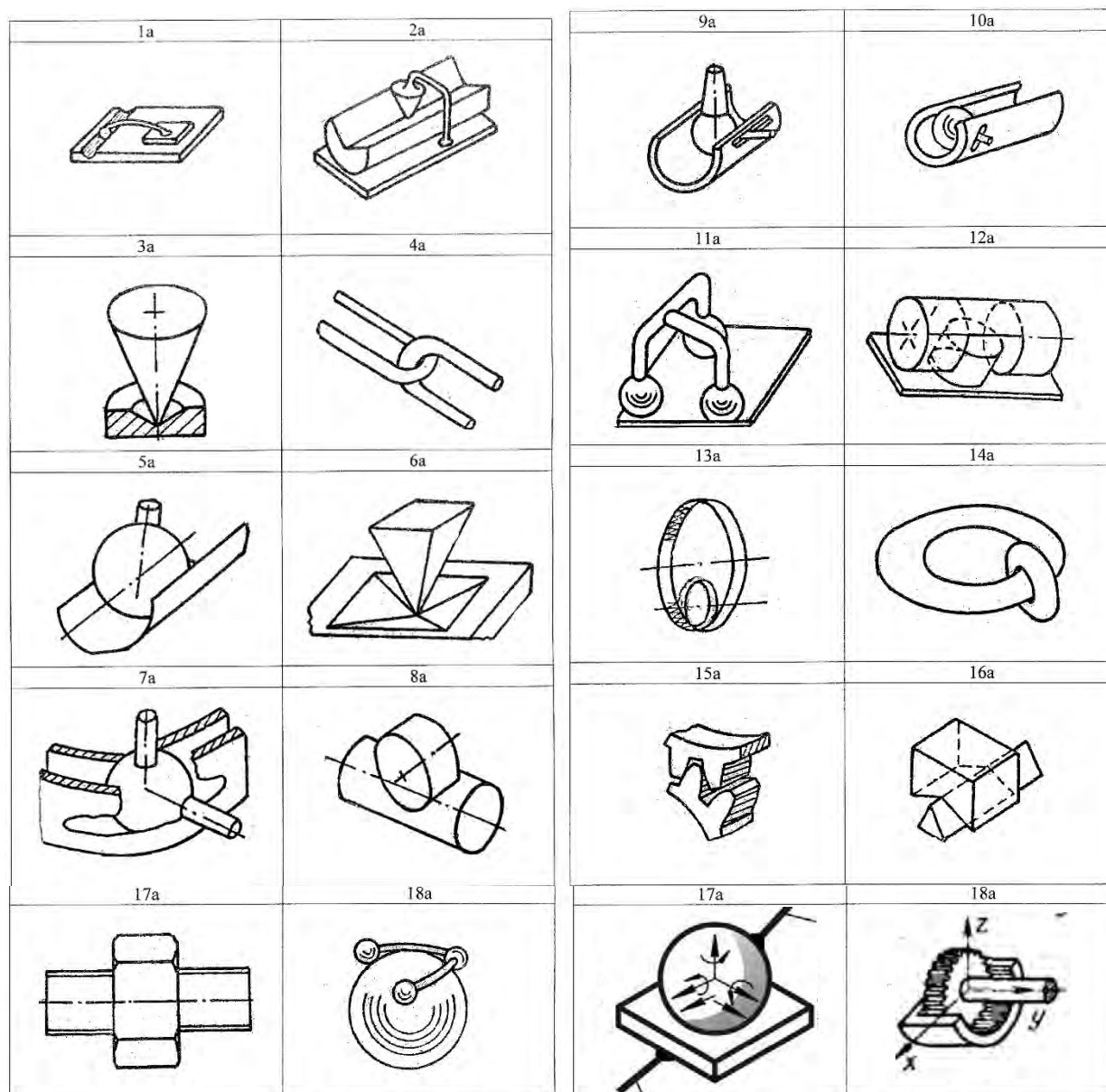


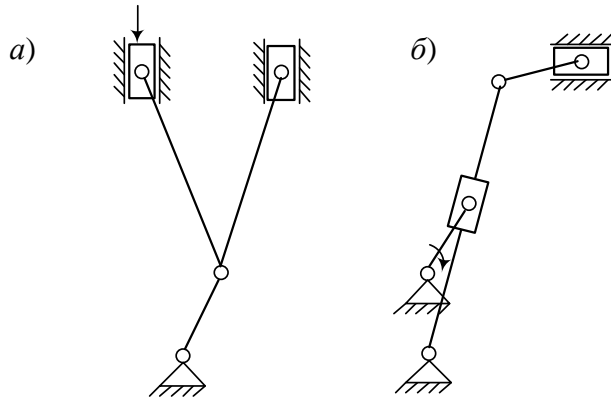
Рисунок 3 – Задания для определения подвижности кинематических пар по вариантам

### *Пример выполнения заданий*

Выполним структурный анализ плоских рычажных механизмов, приведенных на рисунке 4. Обозначим звенья механизмов цифрами (рисунок 5), начиная с ведущего звена. Укажем названия звеньев и движение, которое они совершают (таблица 5). Обозначим кинематические пары буквами. Укажем их названия и подвижность  $W$  (см. таблицу 1), номера звеньев, образующие пару (таблица 6). Определим степень подвижности:

$$W = 3n - 2p_1 - p_2 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 1 = 1.$$

Для структурного анализа из заданных механизмов выделим механизмы первого класса.



а – механизм V-образного ДВС; б – механизм поперечно-строгального станка

Рисунок 4 – Плоские рычажные механизмы

Для механизма двигателя – это ползун  $I$ , образующий поступательную кинематическую пару  $A$  со стойкой  $O$ . Для механизма станка – это кривошип  $I$ , образующий со стойкой вращательную пару  $A$ .

Оставшиеся кинематические цепи механизмов разбиваем на простейшие структурные группы – диады, включающие два соединенных звена и три кинематические пары. Завершаем структурный анализ составлением структурной формулы механизмов:

$$I(0, 1) \leftarrow Д(2, 3) \text{ II}, 2 + Д(4, 5) \text{ II}, 2 \rightarrow \text{II}, 2.$$

Таблица 5 – Звенья рычажных механизмов

Механизм V-образного двигателя		Механизм поперечно-строгального станка	
Название	Движение	Название	Движение
1 Ползун	Поступательное	1 Кривошип	Вращательное
2 Шатун	Сложное	2 Кулисный камень	Сложное
3 Кривошип	Вращательное	3 Кулиса	Вращательное
4 Шатун	Сложное	4 Шатун	Сложное
5 Ползун	Поступательное	5 Ползун	Поступательное

Таблица 6 – Кинематические пары механизмов

Механизм V-образного двигателя				Механизм поперечно-строгального станка			
Обозначение	Название	Звенья	$W$	Обозначение	Название	Звенья	$W$
$A$	Поступательная	0, 1	1	$A$	Вращательная	0, 1	1
$B$	Вращательная	1, 2	1	$B$	Вращательная	1, 2	1
$C$	Вращательная	2, 3	1	$C$	Поступательная	2, 3	1
$D$	Вращательная	3, 0	1	$D$	Вращательная	3, 4	1
$E$	Вращательная	3, 4	1	$E$	Вращательная	4, 5	1
$F$	Вращательная	4, 5	1	$F$	Поступательная	5, 0	1
$G$	Поступательная	5, 0	1	$G$	Вращательная	3, 0	1

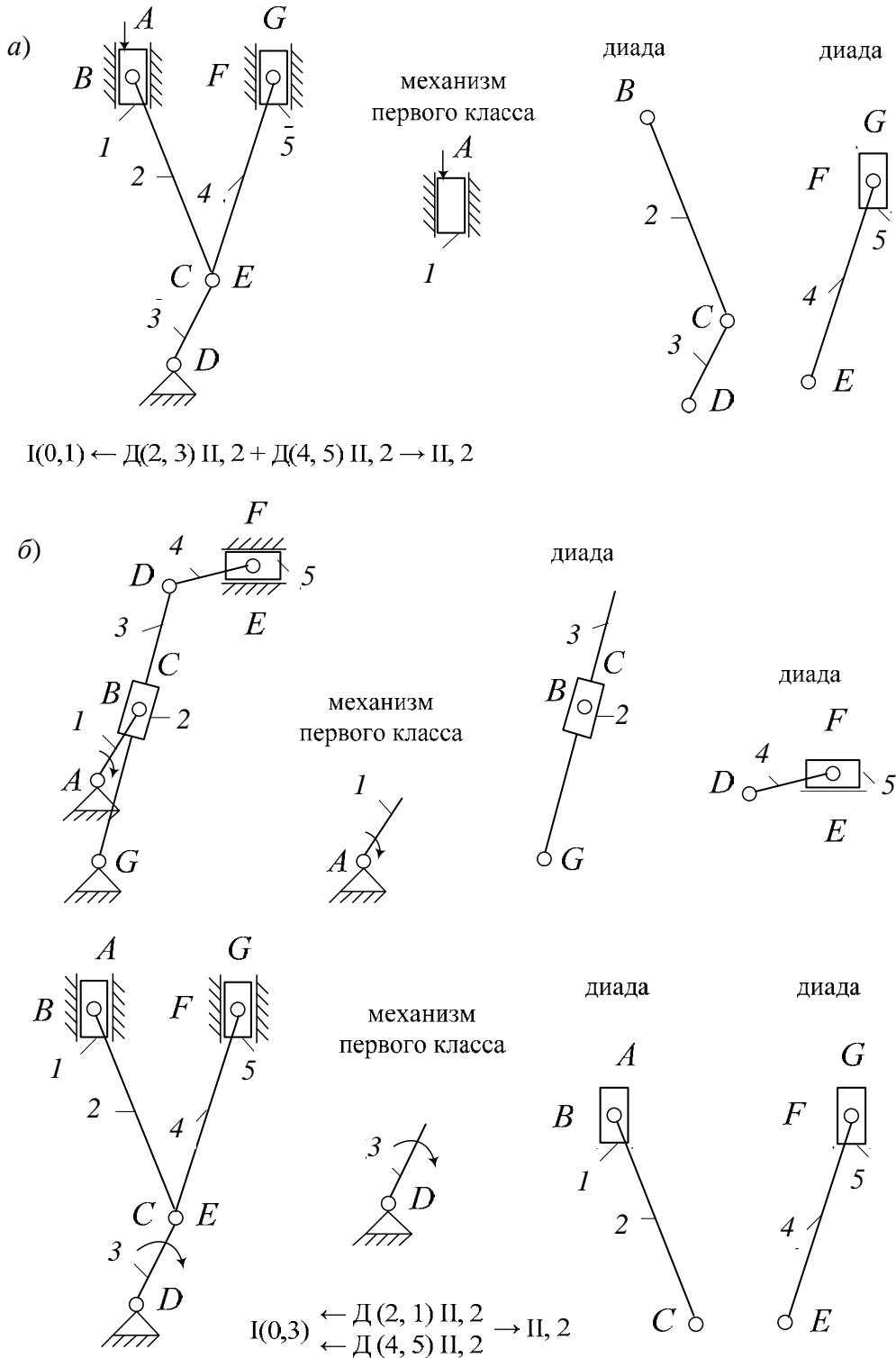


Рисунок 5 – Примеры структурного анализа механизмов

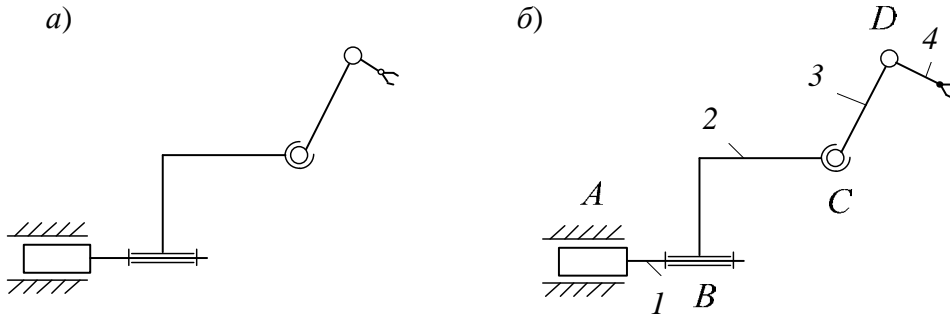
Формула расшифровывается следующим образом. Для получения представленных механизмов необходимо к механизму I класса, включающему звенья (0,1), присоединить последовательно диаду Д (2, 3), а затем диаду Д (4, 5). Диады второго класса, порядка, следовательно, и механизм тоже второго класса и порядка. Структурный анализ зависит от заданного ведущего звена – сравните рисунок 5, а, в.





Рассмотрим механизм манипулятора, приведенный на рисунке 6, а. Обозначим звенья цифрами, а кинематические пары буквами (рисунок 6, б). Заполним таблицу 7. По формуле (1) определим степень подвижности манипулятора:

$$W = 6n - 5p_1 - 4p_2 - 3p_3 - 2p_4 - p_5 = 6 \cdot 4 - 5 \cdot 3 - 3 \cdot 1 = 6.$$



а – исходные данные; б – обозначения

Рисунок 6 – Схема манипулятора

Таблица 7 – Кинематические пары манипулятора

Обозначение	Название	Звено	$W$
A	Поступательная	0, 1	1
B	Вращательная	1, 2	1
C	Сферический шарнир	2, 3	3
D	Вращательная	3, 4	1

## Практические занятия № 3–5. Построение планов скоростей и ускорений рычажных механизмов. Метод кинематических диаграмм

### *Теоретические основы практических занятий*

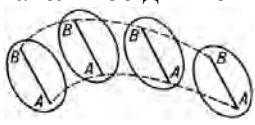
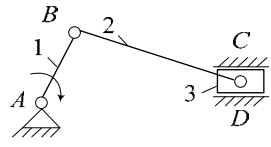

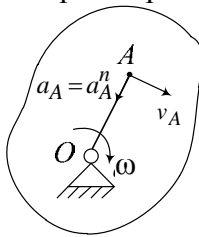
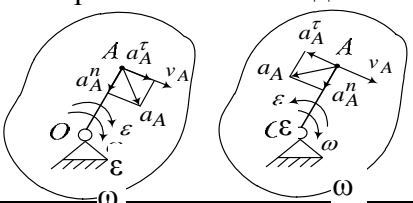
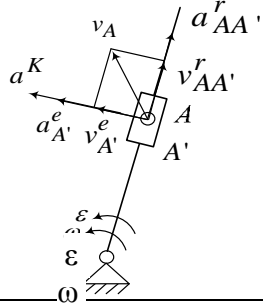
Кинематика – раздел механики, изучающий движение с геометрической точки зрения, без учета причин, вызывающих его. Для характеристики движения используют следующие кинематические параметры: перемещение  $s(t)$ , м; скорость  $v$ , м/с ( $v = ds / dt$ ); ускорение  $a$ , м/с<sup>2</sup> ( $a = dv / dt$ ). Можно применять их аналоги – функцию положения  $s(\varphi_1)$ , м; передаточную функцию скорости  $v_q$ , м/рад ( $v_q = ds / d\varphi_1$ ), или передаточную функцию ускорения  $a_q$ , м/рад<sup>2</sup> ( $a_q = dv_q / d\varphi_1$ , где  $\varphi_1$  – обобщенная координата угла поворота входного звена 1;  $t$  – время). Связь между скоростями и ускорениями и их передаточными функциями

$$v = v_q \omega_1; \quad (4)$$

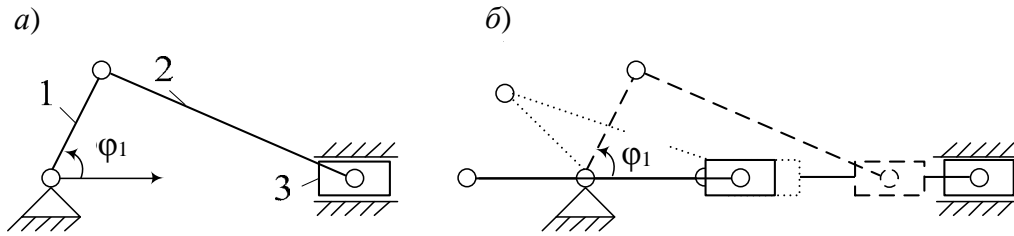
$$a = a_q \omega_1^2. \quad (5)$$

В таблице 8 рассмотрены основные виды движения.

Таблица 8 – Основные виды движения

Вид движения	Пример движения	Скорость	Ускорение
<p><b>Поступательное движение</b> – это движение, при котором траектории, скорости и ускорения всех точек этого тела одинаковы и тело движется без поворота.</p> <p><b>Прямолинейное движение</b> – частный случай поступательного движения по прямой.</p> <p><b>Круговое поступательное движение</b> – траектория окружности</p>	<p>Поступательное движение тела</p>  <p>Прямолинейное движение ползуна</p>  <p>Круговое поступательное движение груза</p> 	$v_A = v_B = \frac{ds}{dt}$ $v_3 = \frac{ds}{dt}$	$a_A = a_B = \frac{dv}{dt},$ $a_3 = \frac{dv}{dt}$
<p><b>Вращательное движение</b> – движение, при котором одна точка тела неподвижна относительно выбранной системы отсчета</p>	<p>Равномерное вращение</p>  <p>Ускоренное      Замедленное</p> 	$v_A = \omega l_{OA}$ $v_A = \omega \cdot l_{OA}$	$\vec{a}_A = \vec{a}_A^n,$ $a_A^n = \omega^2 \cdot l_{OA}$ $\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau,$ $\vec{a}_A = \sqrt{(a_A^n)^2 + (a_A^\tau)^2},$ $a_A^n = \omega^2 \cdot l_{OA},$ $a_A^\tau = \epsilon \cdot l_{OA}$
<p><b>Сложное движение</b> – результат сложения двух разных видов движений: переносного (<math>e</math>) и относительного (<math>r</math>)</p>	<p>Переносное <math>e</math> – вращательное, относительное <math>r</math> – поступательное</p> 	$\vec{v}_A = \vec{v}_A^e + \vec{v}_{AA}^r$	$\vec{a}_A = \vec{a}_A^e + \vec{a}_{AA}^r + \vec{a}^K,$ $a^K = 2\omega \cdot v_{AA}^r$
<p>Примечание – <math>\vec{a}_A^n</math> – вектор нормального ускорения точки направляется к центру вращения; <math>a^K</math> – ускорение Кориолиса направляется поворотом на <math>90^\circ</math> вектора относительной скорости <math>\vec{v}_{AA}^r</math> по направлению переносного вращения <math>\omega</math></p>			

Для кинематического анализа строят кинематическую схему механизма (структурную схему с учетом геометрических размеров звеньев), планы положений звеньев (кинематические схемы при заданных положениях входного звена) (рисунок 7). Определить кинематические параметры можно методом планов, методом замкнутых векторных контуров, методом численного или графического дифференцирования (интегрирования).



а – кинематическая схема механизма; б – несколько планов положений механизма

Рисунок 7 – Схемы для кинематического анализа механизма ( $\mu_s = 0,01 \text{ м/мм}$ )

**Планом скоростей звена** называется плоский пучок векторов, идущих из полюса, которые изображают в масштабе абсолютные скорости точек звена; отрезки, соединяющие концы векторов, изображают относительные скорости точек. Совокупность планов скоростей звеньев с общим полюсом называется **планом скоростей механизма**. Определение плана ускорений аналогично.

**Геометрический метод замкнутых векторных контуров** основан на векторных уравнениях, связывающих положения характерных точек механизма. Проецируя эти уравнения на оси координат, получают аналитические выражения для определения линейных  $x_i$ ,  $y_i$  и угловых  $\varphi_k$  координат в зависимости от обобщенной координаты  $\varphi_1$ . В качестве обобщенной координаты  $\varphi_1$  принимают угол поворота входного звена (кривошипа). На рисунке 8 рассмотрено применение этого метода для кривошипно-ползунного механизма.

Механизм можно представить в виде замкнутого векторного контура  $OAB$ :

Механизм можно представить в виде замкнутого векторного контура  $OAB$ :

$$\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}. \quad (6)$$

Спроецируем его на оси координат:

$$\begin{cases} l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 = x_3; \\ l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 = 0, \end{cases} \quad (7)$$

где  $x_3$  – координата, определяющая положение ползуна;

$\varphi_1$  и  $\varphi_2$  – углы положения кривошипа длиной  $l_1$  и шатуна длиной  $l_2$ .

Система (7) содержит два уравнения и две неизвестных. Задаваясь значения-



ми угла поворота кривошипа  $\varphi_1$ , можно определить  $\varphi_2$  и  $x_3$ . Для определения передаточных функций скорости  $v_{q3}$  и ускорения  $a_{q3}$  можно продифференцировать систему (7) по  $\varphi_1$ :

$$\begin{cases} -l_1 \sin \varphi_1 - U_{21} l_2 \sin \varphi_2 = v_{q3}; \\ l_1 \cos \varphi_1 + U_{21} l_2 \cos \varphi_2 = 0, \end{cases} \quad (8)$$

где  $U_{21}$  – передаточная функция угловой скорости шатуна.

**Методы численного дифференцирования (интегрирования)** основаны на известных формулах численного дифференцирования (интегрирования) и хорошо формализуются. Например, зная значения перемещений  $x_3$  ползуна 3 при заданных углах поворота  $\varphi_1$  кривошипа 1 (рисунок 9, а), можно получить передаточные функции скорости  $v_{q3}$  (рисунок 9, б) и ускорения  $a_{q3}$  ползуна (рисунок 9, в), продифференцировав графически или численно по формулам

$$v_{q3i} = \frac{x_{3i} - x_{3i-1}}{\varphi_{1i} - \varphi_{1i-1}}; \quad a_{q3i} = \frac{v_{q3i} - v_{q3i-1}}{\varphi_{1i} - \varphi_{1i-1}}; \quad i = \overline{1..n}, \quad (9)$$

где  $x_{3i}$  и  $s_{3i-1}$  – значения перемещений ползуна в  $i$ -й и предыдущей точках при положениях  $\varphi_{1i}$  и  $\varphi_{1i-1}$  кривошипа;

$v_{q3i}$  и  $v_{q3i-1}$  – значения передаточных функций скорости ползуна в  $i$ -й и предыдущей точках при положениях  $\varphi_{1i}$  и  $\varphi_{1i-1}$  кривошипа;

$i$  и  $n$  – номер положения и общее число рассмотренных положений.

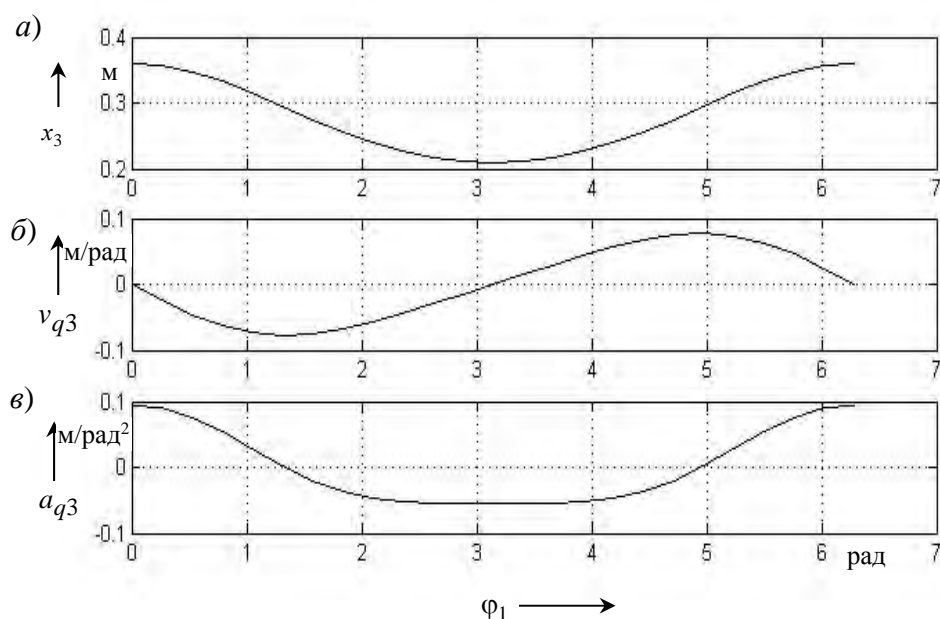


Рисунок 9 – Применение метода численного дифференцирования и интегрирования

**Метод кинематических диаграмм** отличается простотой реализации, хорошо иллюстрирует связь между кинематическими параметрами, однако дает низкую точность результатов. Рассмотрим его на примере кривошипно-ползунного механизма (см. рисунок 8).

Положение точки  $B$  при заданном значении обобщенной координаты  $\varphi_1$  определяется координатой  $x$ . Если обозначить координату точки  $B$  в крайнем положении механизма  $x_0$ , то ее перемещение  $S = x - x_0$ . Перемещение представляет функцию угла  $\varphi_1$ . Задаваясь значениями этого угла, по планам положений механизма определим перемещения  $S$  и построим график  $S(\varphi_1)$ . Поскольку  $\varphi_1 = \omega t$ , ось  $\varphi_1$  можно считать осью  $t$ , следовательно, полученный график есть график  $S(t)$ . Согласно определению скорости и графическому смыслу производной, имеем

$$V = \frac{dS}{dt} = \operatorname{tg} \alpha_s k_v,$$

где  $\alpha_s$  – угол наклона касательной к графику  $S(t)$ .

Отсюда следует способ построения графика  $V(t)$ : проводятся касательные в выбранных точках графика  $S(t)$ , измеряются углы наклона  $\alpha_s$ , вычисляются тангенсы этих углов. Аналогичным образом находится ускорение.

Между графиками  $S(t)$ ,  $V(t)$ ,  $a(t)$  существует связь как между интегральными и дифференциальными кривыми. Экстремуму интегральной кривой соответствует ноль на дифференциальной кривой. Точке перегиба интегральной кривой соответствует экстремум дифференциальной кривой. Возрастающим значениям интегральной кривой соответствуют положительные значения дифференциальной кривой, убывающим – отрицательные.

Непосредственное применение указанного способа построения графиков не практикуется из-за сложности точного построения касательных. Обычно используется его модификация, которая называется **методом хорд** (касательные, проведенные в точках, лежащих на серединах выбранных участков, заменяются хордами этих участков).

Определим методом кинематических диаграмм кинематические параметры кривошипно-ползунного механизма (рисунок 10), для которого заданы  $l_{O_2A} = 0,1$  м;  $l_{AB} = 0,3$  м;  $n_1 = 60$  мин<sup>-1</sup>.

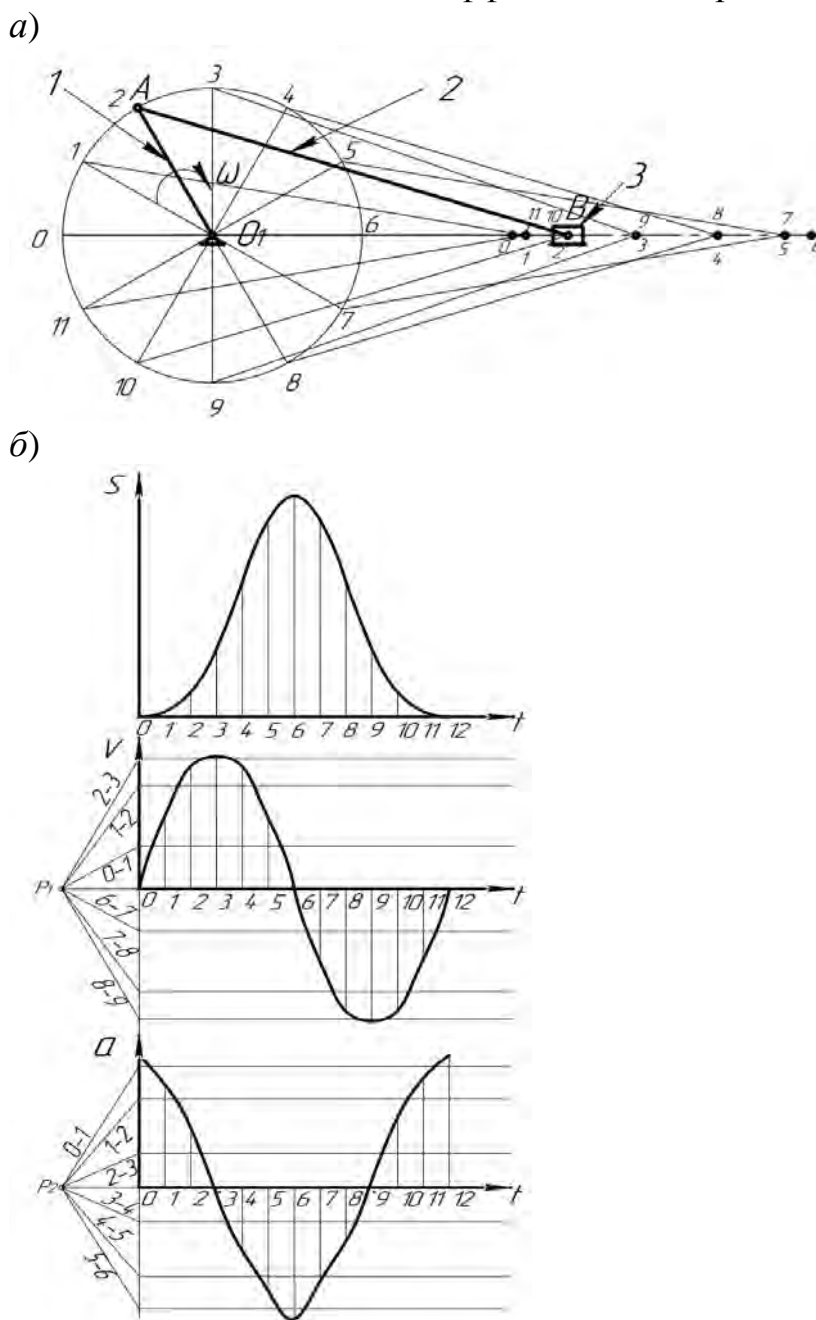
В выбранном масштабе  $K_S = 0,001$  м/мм методом засечек строим план положений механизма в 12 положениях и определяем перемещение ползуна 3 для каждого положения графически. Строим по полученным перемещениям ползуна 3 диаграмму перемещений  $S = f(t)$  в масштабе  $K_S = 0,001$  м/мм (см. рисунок 10).

Для построения диаграммы скоростей  $V = f(t)$  выбираем полюсное расстояние  $H_1 = 30$  мм и полюс построения  $P_1$ . Из полюса  $P_1$  проводим лучи 0-1;



1-2; ...; 11-12, параллельные хордам каждого из участков диаграммы перемещений  $S = f(t)$ . Проведенные лучи отсекают на оси ординаты отрезки, являющиеся средними значениями скорости соответствующего участка. Соединив эти ординаты плавной кривой, имеем диаграмму скоростей  $V = f(t)$  ползуна 3. Для построения диаграммы ускорений  $a = f(t)$  выбираем полюсное расстояние  $H_2 = 30$  мм и полюс построения  $P_2$  и аналогично графически дифференцируем диаграмму скоростей  $V = f(t)$ .

Для определения значений скоростей и ускорений ползуна 3 за полный цикл движения механизма находим масштабные коэффициенты построения диаграмм.



а – план положений механизма; б – диаграмма движения ползуна

Рисунок 10 – Метод кинематических диаграмм

Масштабный коэффициент времени

$$K_t = \frac{180}{6 \cdot n_1 \cdot x_t} = \frac{180}{6 \cdot 60 \cdot 120} = 0,00417 \text{ с/мм},$$

где  $x_t$  – абсцисса диаграммы перемещений,  $x_t = 120$  мм.

Масштабный коэффициент диаграммы скоростей

$$K_v = \frac{K_s}{H_1 \cdot K_t} = \frac{0,001}{30 \cdot 0,00417} = 0,008 \text{ м/с}.$$

Масштабный коэффициент диаграммы ускорений

$$K_a = \frac{K_v}{H_2 \cdot K_t} = \frac{0,008}{30 \cdot 0,00417} = 0,0639 \text{ м/(с}^2 \cdot \text{мм)}.$$

### Задания для самостоятельного выполнения.

В таблице 4 приведены кинематические схемы механизмов для кинематического анализа методом планов и геометрическим. Вариант схемы задает преподаватель.

### Пример выполнения задания

Рассмотрим применение метода планов скоростей и ускорений для механизма поперечно-строгального станка, приведенного на рисунке 10, а. Известны длины  $L$  между соответствующими точками:  $L_{OA} = 0,15$  м;  $L_{OB} = 0,3$  м;  $L_{BC} = 0,57$  м;  $L_{DC} = 0,19$  м. Кривошип  $I$  вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega_1 = 10$  рад/м.

Необходимо вычертить кинематическую схему заданного механизма.

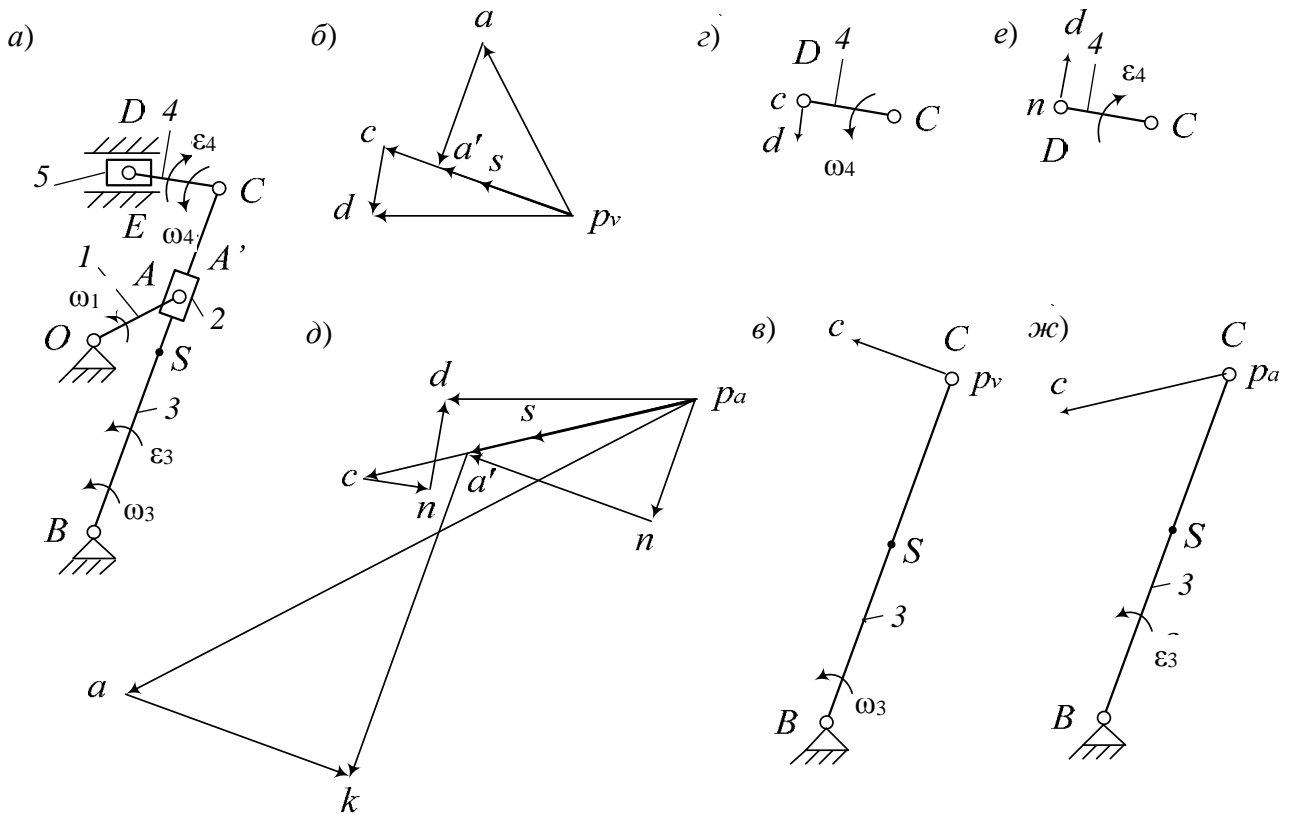
Для удобства размещения механизма можно использовать масштабный коэффициент  $\mu_s$ ,  $\frac{\text{м}}{\text{мм}}$ , который равен отношению реального значения длины  $L$

в метрах к выбранному отрезку  $l$  в миллиметрах на схеме:  $\mu_s = \frac{L}{l}$ .

Произведем структурный анализ механизма. Выделим две диады, составленные звеньями 4-5 и 2-3, и механизм первого класса, включающий кривошип 1 со стойкой.

Ставим полюс построения плана скоростей – точку  $p_v$ , в которой на плане скорость равна нулю и относительно которой измеряются значения скоростей подвижных точек механизма (рисунок 10, б).





$a$  – план положений механизма с указанными направлениями угловой скорости и ускорения;  $b$  – план скоростей;  $c$  – схема определения угловой скорости кулисы 3;  $d$  – схема определения угловой скорости шатуна 4;  $e$  – схема определения углового ускорения кулисы 3;  $ж$  – схема определения углового ускорения шатуна 4

Рисунок 10 – Построение планов скоростей и ускорений механизма

По заданной угловой скорости кривошипа  $\omega_1$  можно определить линейную скорость конца кривошипа точки  $A$ :

$$v_A = \omega_1 \cdot L_{OA} = 10 \cdot 0,15 = 1,5 \text{ м/с} .$$

Направление скорости точки определяется касательной к траектории точки. Направляем вектор скорости  $\vec{v}_A$  перпендикулярно кривошипу в направлении его вращения, заданном на рисунке направлением  $\omega_1$ .

Выбираем произвольно длину отрезка  $p_v a$ , обозначающего скорость точки  $A$ . Определяем масштабный коэффициент построения плана скоростей  $\mu_v = \frac{v_A}{p_v a}$ . Для рассматриваемого случая  $\mu_v = \frac{1,5}{150} = 0,01 \frac{\text{м/с}}{\text{мм}}$ .

Из системы определяем скорость  $\vec{v}_{A'}$  внутренней точки  $A'$  диады 2-3, т. е. скорость кулисного камня 2, совпадающую со скоростью кулисы 3 в точке  $A'$ :



$$\begin{cases} \vec{v}_{A'} = \vec{v}_A + \vec{v}_{A'A} \parallel BC; \\ \vec{v}_{A'} = \vec{v}_B + \vec{v}_{A'B} \perp BC, \end{cases} \quad (10)$$

где  $\vec{v}_{A'A}$  – относительная скорость камня по кулисе, направлена параллельно кулисе 3;

$\vec{v}_{A'B}$  – скорость точки  $A'$ , лежащей на кулисе, относительно центра вращения кулисы  $B$ , направлена перпендикулярно кулисе 3;

$\vec{v}_B$  – скорость точки  $B$ , находящейся на стойке, равна нулю.

Там, где линии скоростей  $\vec{v}_{A'A}$  и  $\vec{v}_{A'B}$  пересекаются, находится точка  $a'$ .

Соединим полюс  $p_v$  с точкой  $a'$  и получим вектор скорости  $\vec{v}_{A'}$ . Измеряем расстояние  $p_v a'$  и умножаем на масштабный коэффициент  $\mu_v$  для определения скорости  $\vec{v}_{A'A}$ , м/с. Аналогично определим и  $\vec{v}_{A'B}$ :

$$\vec{v}_{A'A} = aa' \cdot \mu_v = 101 \cdot 0,01 = 1,01 \text{ м/с};$$

$$\vec{v}_{A'B} = p_v a' \cdot \mu_v = 108,2 \cdot 0,01 = 1,082 \text{ м/с}.$$

Вернемся к схеме механизма и обратим внимание на кулису 3. Скорость ее точки  $B$  известна и равна нулю, поэтому лежит в полюсе  $p_v$ , а скорость  $\vec{v}_{A'}$  ее точки  $A'$  тоже определена отрезком  $p_v a'$ . По свойству подобия на продолжении  $p_v a'$  можно найти скорость ее точки  $C$ :

$$\frac{p_v a'}{p_v c} = \frac{BA'}{BC}; \quad p_v c = \frac{p_v a' \cdot BC}{BA'}; \quad (11)$$

$$p_v c = \frac{108,2 \cdot 0,57}{0,392} = 157,3 \text{ мм}.$$

Отложим от полюса  $p_v$  в направлении точки  $a'$  отрезок  $p_v c$ . Определим скорость точки  $C$ , м/с, по формуле

$$\vec{v}_C = p_v c \cdot \mu_v = 157,3 \cdot 0,01 = 1,573 \text{ м/с}.$$

Скорость центра масс кулисы, т. е. точки  $S$ , можно определить из соотношения, аналогичного (11). Зная, что точка  $S$  делит кулису пополам, скорость точки  $C$  тоже можно поделить пополам:  $\vec{v}_S = \vec{v}_C / 2 = 1,573 / 2 = 0,787 \text{ м/с}$ . Отметим точку  $s$  на плане посередине отрезка  $p_v c$ .

Из системы определяем скорость  $\vec{v}_D$  внутренней точки  $D$  диады 4-5, т. е. скорость ползуна 5:



$$\begin{cases} \vec{v}_D = \vec{v}_C + \vec{v}_{DC} \perp DC; \\ \vec{v}_D = \vec{v}_E + \vec{v}_{DE} \parallel OX, \end{cases} \quad (12)$$

где  $\vec{v}_{DC}$  – относительная скорость точки  $D$  во вращательном движении вокруг точки  $C$ , направлена перпендикулярно шатуну 4;

$\vec{v}_{DE}$  – скорость точки  $D$ , лежащей на ползуне 5, относительно точки  $E$  стойки, направлена параллельно направляющим ползуна, т. е. горизонтально;

$\vec{v}_E$  – скорость точки  $E$ , находящейся на стойке, равна нулю.

Там, где линии скоростей  $\vec{v}_{DC}$  и  $\vec{v}_{DE}$  пересекаются, находится точка  $d$ .

Соединяем полюс  $p_v$  с точкой  $d$  и получим вектор скорости  $\vec{v}_D$ . Измеряем расстояние  $p_v d$  в миллиметрах и умножаем на масштабный коэффициент  $\mu_v$  для определения скорости  $\vec{v}_{DE}$ , м/с. Аналогично определим и  $\vec{v}_{DC}$ :

$$\vec{v}_{DC} = dc \cdot \mu_v = 54,7 \cdot 0,01 = 0,547 \text{ м/с}; \quad \vec{v}_{DE} = p_v d \cdot \mu_v = 155,2 \cdot 0,01 = 1,552 \text{ м/с}.$$

Из второго уравнения системы (12), поскольку  $\vec{v}_E = 0$ , получим  $\vec{v}_D = \vec{v}_{DE} = 1,552 \text{ м/с}$ .

Определим угловую скорость звеньев, совершающих вращательное или сложное движение, в данном случае это скорость кулисы и шатуна:

$$\omega_3 = \frac{v_B}{L_{BC}} = \frac{1,573}{0,57} = 2,76 \text{ рад/с}; \quad \omega_4 = \frac{v_{DC}}{L_{DC}} = \frac{0,0547}{0,19} = 0,29 \text{ рад/с}.$$

На рисунках 10, в, г показаны схемы определения направления угловых скоростей кулисы 3 и шатуна 4.

Ставим полюс построения плана ускорений – точку  $p_a$ , в которой на плане ускорение равно нулю и относительно которой измеряются значения ускорений подвижных точек механизма (рисунок 10, д).

Построение плана ускорений начинается с определения ускорения точки  $A$  конца кривошипа. Рассмотрим случай равномерного вращения кривошипа с заданной постоянной угловой скоростью  $\omega_1 = 10 \text{ рад/с}$ . Тогда касательное ускорение  $a_A^t$  точки  $A$  тоже будет равно нулю, а ускорение  $a_A$  будет равно нормальной составляющей  $a_A^n$ .

$$a_A = a_A^n = \omega_1^2 L_{OA} = 10^2 \cdot 0,15 = 15 \text{ рад/с}.$$

Нормальное ускорение точки  $A$  направлено параллельно кривошипу к центру его вращения, т. е. к точке  $O$  (центростремительное).

Определяем масштабный коэффициент построения плана ускорений



$\mu_a, \frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}} \left( \frac{a_A}{p_a a} \right)$ . Длину отрезка, обозначающего вектор ускорений  $\vec{a}_A$ , выбираем произвольно исходя из удобства размещения на листе.

$$\text{Для рассматриваемого случая } \mu_a = \frac{a_A}{p_a a} = \frac{15}{500} = 0,03 \frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}}.$$

Для определения ускорения  $\vec{a}_A$ , внутренней точки  $A'$  диады 2-3 составим систему

$$\begin{cases} \vec{a}_{A'} = \vec{a}_A + \vec{a}_{A'A}^K + \vec{a}_{A'A}^\tau \parallel BC; \\ \vec{a}_{A'} = \vec{a}_B + \vec{a}_{A'B}^n + \vec{a}_{A'B}^\tau \perp BC, \end{cases} \quad (13)$$

где  $a_{A'A}^\tau$  – относительное ускорение камня по кулисе, направлено параллельно кулисе 3;

$\vec{a}_{A'A}^K$  – ускорение Кориолиса, модуль которого  $\vec{a}_{A'A}^K = 2 \cdot \omega_3 \cdot v_{A'A}$ ;

$\vec{a}_{A'B}^n$  – относительное нормальное ускорение точки  $A'$  во вращении ее относительно точки  $B$ , направлено к центру вращения кулисы к точке  $B$ ;

$\vec{a}_{A'B}^\tau$  – относительное касательное ускорение точки  $A'$  во вращении ее относительно точки  $B$ , направлено перпендикулярно нормальному, т. е. перпендикулярно кулисе 3;

$\vec{a}_B$  – ускорение точки  $B$ , которая находится на стойке, поэтому  $\vec{a}_B = 0$ .

Определяем ускорение Кориолиса по формуле

$$\vec{a}_{A'A}^K = 2 \cdot \omega_3 \cdot v_{A'A} = 2 \cdot 2,76 \cdot 1,01 = 5,575 \text{ м/с}^2.$$

Направление ускорения Кориолиса определяется поворотом вектора относительной скорости  $\vec{v}_{A'A}$  (отрезок  $aa'$  на плане скоростей) на  $90^\circ$  в направлении вращения кулисы  $\omega_3$ . Отрезок в миллиметрах, обозначающий ускорение Кориолиса, на плане ускорений определяется с учетом масштабного коэффициента:  $ak = a^K / \mu_a = 5,575 / 0,03 = 185,8 \text{ мм}$ .

$$\text{Определяем нормальное ускорение: } \vec{a}_{A'B}^n = \frac{v_{A'B}^2}{L_{A'B}} = \frac{1,082^2}{0,392} = 2,987 \text{ м/с}^2.$$

Отрезок в миллиметрах, обозначающий ускорение  $\vec{a}_{A'B}^n$  на плане ускорений, определяется с учетом масштабного коэффициента:

$$p_a n_1 = a_{A'B}^n / \mu_a = 2,987 / 0,03 = 99,56 \text{ мм}.$$



При графическом решении первого уравнения системы (9) для получения вектора  $\vec{a}_{A'}$  необходимо к вектору ускорения  $\vec{a}_A$  прибавить вектор  $\vec{a}_{A'A}^K$  и вектор  $a_{A'A}^\tau$ . Это значит, на плане из конца вектора ускорения  $\vec{a}_A$ , т. е. из точки  $a$ , надо построить отрезок  $ak$  ускорения Кориолиса и провести линию параллельно кулисе 3, на которой лежит вектор ускорения  $a_{A'A}^\tau$ .

При графическом решении второго уравнения системы (9) для получения вектора  $\vec{a}_{A'}$  необходимо к вектору ускорения  $\vec{a}_B = 0$  прибавить вектор  $\vec{a}_{A'B}^n$ . Это значит, на плане из полюса, т. е. из точки  $p_a$ , надо построить отрезок  $p_a n_1$  параллельно кулисе 3 к центру вращения  $B$ . Из его конца  $n$  провести перпендикуляр к кулисе 3. На этой линии лежит вектор ускорения  $\vec{a}_{A'B}^\tau$ .

Там, где линии ускорений  $a_{A'A}^\tau$  и  $\vec{a}_{A'B}^\tau$  пересекаются, находится точка  $a'$ .

Соединим полюс  $p_a$  с точкой  $a'$  и получим вектор ускорения  $\vec{a}_{A'}$ . Измеряем расстояние  $p_a a'$  в миллиметрах и умножаем на масштабный коэффициент  $\mu_a$  для определения ускорения  $\vec{a}_{A'}$ , м/с<sup>2</sup>. Определим  $a_{A'A}^\tau$  и  $\vec{a}_{A'B}^\tau$ .

$$a_{A'} = p_a a' \cdot \mu_a = 182,9 \cdot 0,03 = 5,49 \text{ м/с}^2; \quad a_{A'A}^\tau = ka' \cdot \mu_a = 270 \cdot 0,03 = 8,1 \text{ м/с}^2;$$

$$\vec{a}_{A'B}^\tau = n_1 a' \cdot \mu_a = 152 \cdot 0,03 = 4,56 \text{ м/с}^2.$$

Ускорение точки  $C$ , как и ее скорость, определим по свойству подобия. Ускорение точки  $B$  известно и равно нулю, поэтому лежит в полюсе  $p_a$ , а ускорение точки  $\vec{a}_{A'}$  уже определено отрезком  $p_a a'$ . По свойству подобия на продолжении  $p_a a'$  можно найти ускорение точки  $C$ :

$$\frac{p_a a'}{p_a c} = \frac{BA'}{BC}; \quad p_a c = \frac{p_a a' \cdot BC}{BA'}; \quad (14)$$

$$p_a c = \frac{182,9 \cdot 0,57}{0,392} = 266 \text{ мм.}$$

Отложим от полюса  $p_a$  в направлении точки  $a'$  отрезок  $p_a c$ . Определим ускорение точки  $C$ :  $a_C = p_a c \cdot \mu_a = 266 \cdot 0,03 = 7,98 \text{ м/с}^2$ .

Ускорение центра масс  $S$  кулисы можно определить из соотношения, аналогичного (14). Зная, что точка  $S$  делит кулису пополам, ускорение точки  $C$  можно поделить пополам:  $a_S = a_C / 2 = 7,98 / 2 = 3,99 \text{ м/с}$ . Отметим точку  $s$  на плане посередине отрезка  $p_a c$ .

Для определения ускорения  $\vec{a}_D$  внутренней точки  $D$  диады 4-5 составим систему



$$\begin{cases} \vec{a}_D = \vec{a}_C + \vec{a}_{DC}^n + \vec{a}_{DC}^\tau \perp DC; \\ \vec{a}_D = \vec{a}_E + \vec{a}_{DE}^\tau \parallel OX, \end{cases} \quad (15)$$

где  $a_{DC}^\tau$  – относительное касательное ускорение во вращательном движении точки  $D$  по отношению к  $C$ , направлено перпендикулярно шатуну 4;

$\vec{a}_{DC}^n$  – относительное нормальное ускорение точки  $D$  во вращении ее относительно  $C$ , направлено параллельно шатуну к точке  $C$ ;

$\vec{a}_{DE}^\tau$  – относительное касательное ускорение точки  $D$  при ее поступательном движении параллельно горизонтальным направляющим стойки;

$\vec{a}_E$  – ускорение точки  $E$ , которая находится на стойке, поэтому  $\vec{a}_E = 0$ .

$$\text{Определяем нормальное ускорение: } \vec{a}_{DC}^n = \frac{v_{DC}^2}{L_{DC}} = \frac{0,547^2}{0,19} = 1,57 \text{ м/с}^2.$$

Отрезок, обозначающий ускорение  $\vec{a}_{DC}^n$  на плане ускорений, определяется с учетом масштабного коэффициента  $p_{an2} = a_{DC}^n / \mu_a = 1,57 / 0,03 = 52,33 \text{ мм}$ .

При графическом решении первого уравнения системы (15) для получения вектора  $\vec{a}_D$  необходимо к вектору ускорения  $\vec{a}_C$  прибавить вектор  $\vec{a}_{DC}^n$  и вектор  $\vec{a}_{DC}^\tau$ . Это значит, на плане из конца вектора ускорения  $\vec{a}_C$ , т. е. из точки  $c$ , надо построить отрезок  $cn_2$  ускорения  $\vec{a}_{DC}^n$  и провести линию перпендикулярно шатуну 4, на которой лежит ускорение  $\vec{a}_{DC}^\tau$ .

При графическом решении второго уравнения системы (15) для получения вектора  $\vec{a}_D$  необходимо к вектору ускорения  $\vec{a}_E = 0$  прибавить вектор  $\vec{a}_{DE}^\tau$ . Это значит, на плане из полюса, т. е. из точки  $p_a$ , надо построить горизонтальную линию. На этой линии лежит ускорение  $\vec{a}_{DE}^\tau$ .

Там, где линии ускорений  $\vec{a}_{DC}^\tau$  и  $\vec{a}_{DE}^\tau$  пересекаются, находится точка  $d$ .

Измеряем расстояние  $p_a d$  в миллиметрах и умножаем на масштабный коэффициент  $\mu_a$  для определения ускорения  $\vec{a}_D$ , м/с<sup>2</sup>.

$$a_D = a_{DE}^\tau = p_a d \cdot \mu_a = 195,2 \cdot 0,03 = 5,86 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{DC}^\tau = n_2 c \cdot \mu_a = 70,9 \cdot 0,03 = 2,13 \text{ м/с}^2.$$

Определяем величины угловых ускорений кулисы 3 и шатуна 4 отношением касательных ускорений к длине звена:

$$\varepsilon_3 = \frac{a_B}{L_{BC}} = \frac{7,98}{0,57} = 14 \text{ рад/с}^2; \quad \varepsilon_4 = \frac{a_{DC}^\tau}{L_{DC}} = \frac{2,13}{0,19} = 11,21 \text{ рад/с}^2.$$



На рисунке 10, *е, ж* показано, как определять направление углового ускорения, мысленно устанавливая векторы соответствующих ускорений на схеме механизма. Если направление ускорения совпало с направлением угловой скорости, то звено в своем вращательном движении ускоряется, а если  $\varepsilon$  и  $\omega$  направлены в противоположные стороны, то замедляется.

## Практические занятия № 6–7. Метод планов сил. Силовой анализ рычажных механизмов методом рычага Жуковского

### *Теоретические основы практических занятий*

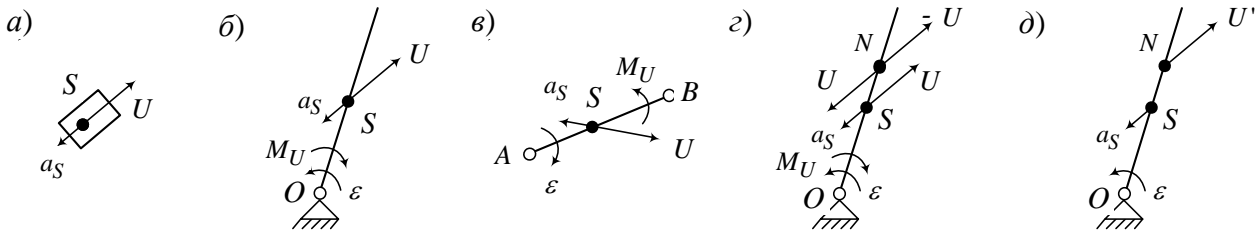
**Динамика** изучает движение тел под действием сил. При этом учитываются инерционные свойства тела.

Принято выделять две основные задачи динамики: прямую и обратную. **Прямая задача динамики** состоит в том, чтобы по заданным силам найти закон движения звеньев. **Обратная задача динамики** – по заданному закону движения найти силы, вызвавшие это движение. К прямым задачам относятся рассматриваемые здесь задачи об истинном движении механизма, о регулировании хода машины, задача о маховике, к обратным задачам – силовое исследование механизма, уравнивание роторов и механизмов.

**Сила** – мера механического взаимодействия тел. Это векторная величина, имеющая точку приложения, направление и модуль. Принята следующая классификация сил. **Движущая сила** – это внешняя сила, приложенная к ведущему звену механизма со стороны двигателя и совершающая положительную работу. **Сила полезного сопротивления** – это внешняя сила, для преодоления которой предназначен механизм, она приложена к ведомому звену и совершает отрицательную работу. **Силы вредного сопротивления** – силы трения в кинематических парах, силы гидравлического и аэродинамического сопротивления, совершающие отрицательную работу. **Сила тяжести**  $G = mg$  приложена к телу в центре масс, работа силы при опускании центра масс положительная, а при подъеме отрицательная, за полный цикл движения работа нулевая. **Силы реакции связей** возникают в местах взаимодействия звеньев, т. е. в кинематических парах, и по третьему закону Ньютона равные по величине и противоположные по направлению. Для механизма работа сил реакции в кинематических парах равна нулю. **Сила инерции**  $U = -ma$  в инерциальных системах позволяет свести динамическую задачу к задаче статики. По **принципу Даламбера**, если к внешним силам добавить силы инерции, то систему сил можно рассматривать как находящуюся в равновесии (**метод кинетостатики**). Для поступательно движущегося тела (рисунок 11, *а*) сила инерции определяется произведением массы тела на ускорение центра масс:  $U = -ma_S$ , прикладывается к центру масс противоположно направлению ускорения. Для вращающегося тела (рисунок 11, *б*), кроме силы, учитывают момент сил инерции  $M_U = -J_S \varepsilon$ , где  $J_S$  – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс  $S$  перпендикулярно плоскости движения;  $\varepsilon$  – угловое ускорение тела. Для сложного движения (рисунок 11, *в*) тоже



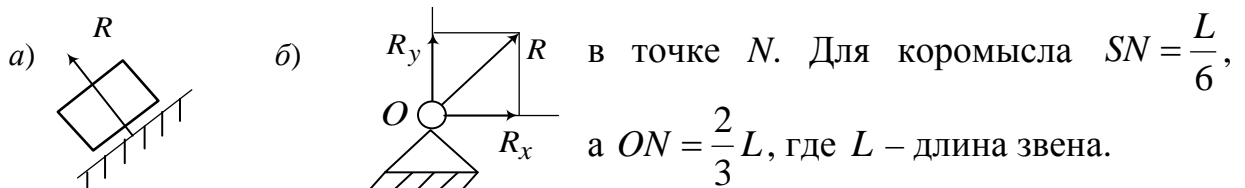
необходимо учесть и силу инерции, и момент сил инерции.



*a* – для поступательного движения; *б* – для вращательного движения; *в* – для сложного движения; *г* – прием замены силы и момента сил инерции одной силой инерции; *д* – результат замены

Рисунок 11 – Силы и моменты инерции для различных видов движения

Удобно заменить  $U$  и  $M_U$  (рисунок 11, *г*) одной силой  $U'$  (рисунок 11, *д*). Для этого можно приложить в точке  $N$  силы  $U$  и  $-U$ . Это не изменит равновесия тела. Силы  $-U$  (в точке  $N$ ) и  $U$  (в центре масс  $S$ ) образуют пару сил с моментом  $M = U \cdot SN$ . Если выбрать расстояние  $SN$  из условия  $SN = \frac{M_U}{U}$ , то  $M$  компенсирует  $M_U$  и можно учитывать в расчетах только силу  $U' = -ma_S$ , приложенную



*a* – в поступательной кинематической паре; *б* – во вращательной кинематической паре

в точке  $N$ . Для коромысла  $SN = \frac{L}{6}$ , а  $ON = \frac{2}{3}L$ , где  $L$  – длина звена.

На рисунке 12 изображены реакции поступательной и вращательной кинематических пар без учета сил трения.

Рисунок 12 – Реакции в кинематических парах

Для динамического расчета используем два метода: **метод планов сил** и **метод рычага Жуковского**. Метод планов сил позволяет определить

силу, уравнивающую заданные внешние силы и силы инерции, а также позволяет определить реакции в кинематических парах. Метод основан на принципе освобождения от связей (отброшенные связи заменяются реакциями) и на принципе Даламбера. **Уравнивающая сила** прикладывается к концу кривошипа перпендикулярно ему и уравнивает все остальные силы, приложенные к звеньям механизма.

Метод рычага Жуковского основан на принципе возможных перемещений (принципе Даламбера-Лагранжа), который утверждает, что работа всех активных сил и сил инерции на возможном перемещении системы равна нулю. Этот метод позволяет оценить уравнивающую силу без определения реакций в кинематических парах.

### Задания для самостоятельного выполнения.

В таблице 4 приведены кинематические схемы механизмов для силового анализа методом планов сил. Силы и массы звеньев задает преподаватель.

#### Пример выполнения задания

Пусть заданы механизм и сила полезного сопротивления  $Q = 250$  Н (рисунок 13, а), план его скоростей (рисунок 13, б) и ускорений (рисунок 13, в). Определим требуемую уравновешивающую силу  $F_{yp}$  и реакции в кинематических парах методом планов сил и методом рычага Жуковского. Пусть известны массы звеньев: масса кулисы  $m_3 = 8$  кг; масса ползуна  $m_5 = 25$  кг. Массы остальных звеньев малы по сравнению с заданными, ими пренебрегаем.

Определим вес третьего и пятого звеньев:  $G_3 = m_3 \cdot g = 8 \cdot 9,81 = 78,48$  Н;  $G_5 = m_5 \cdot g = 25 \cdot 9,81 = 245,25$  Н. Определим силы инерции этих звеньев:  $U_3 = -m_3 \cdot a_S = 8 \cdot (-3,99) = -31,92$  Н;  $U_5 = -m_5 \cdot a_D = 25 \cdot (-5,86) = -146,5$  Н. Знаки «минус» показывают, что направление сил инерции противоположно соответствующим ускорениям, указанным на плане ускорений векторами  $\vec{a}_S - p_a s$ ,  $\vec{a}_D - p_a d$  (см. рисунок 13, в). Уравновешивающую силу  $F_{yp}$  прикладываем к концу кривошипа, перпендикулярно ему в направлении его вращения (рисунок 13, з).

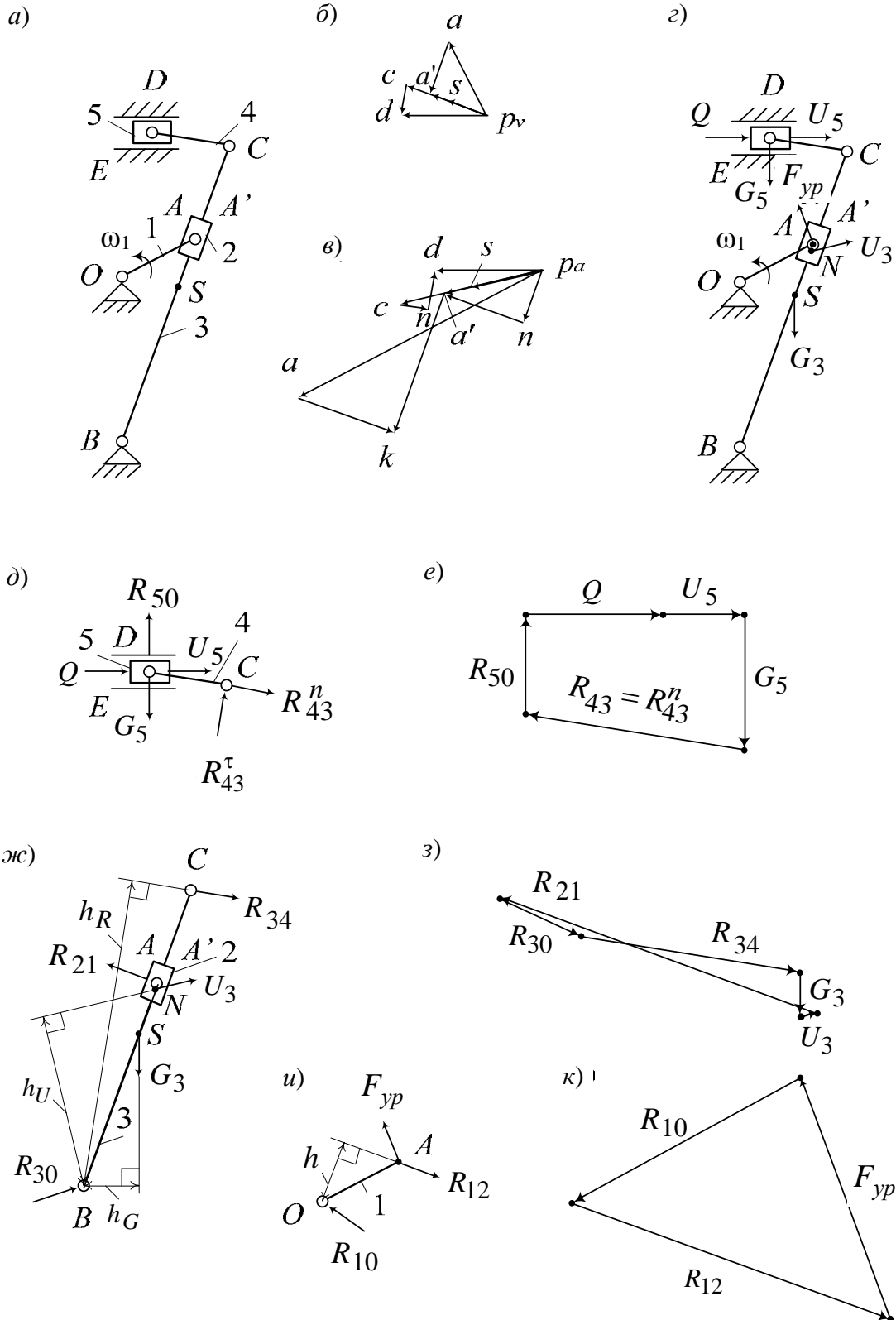
Выделяем диаду 4-5 (рисунок 13, д). В местах отрыва (кинематических парах  $E$  и  $C$ ) отбрасываем связи и заменяем их действие реакциями. Для поступательной пары  $E$  реакция  $R_{50}$  (перпендикулярна направляющим пары), а во вращательной паре реакция неизвестного направления, которую можно разложить на две составляющие: нормальную –  $R_{43}^n$  (параллельно звену) и касательную –  $R_{43}^\tau$  (перпендикулярно звену). Нижний индекс состоит из двух чисел. Первое число указывает, на какое звено действует реакция, а второе – со стороны какого звена. Записываем уравнение равновесия диады в виде суммы всех сил, на нее действующих:

$$\underline{\underline{\vec{Q}}} + \underline{\underline{\vec{U}_5}} + \underline{\underline{\vec{G}_5}} + \underline{\underline{\vec{R}_{50}}} + \underline{\underline{\vec{R}_{43}^n}} + \underline{\underline{\vec{R}_{43}^\tau}} = 0.$$

Геометрически это значит, что многоугольник, стороны которого являются векторами суммы, должен быть замкнут. Такой многоугольник можно построить, имея не более двух неизвестных. Для определения их числа удобно применять подчеркивание. Два подчеркивания – вектор известен и по направлению, и по величине. Одно подчеркивание – вектор известен лишь по направлению. В данном случае имеем три неизвестных. Необходимо одну из них определить. Для этого составим уравнение равновесия моментов сил звена 4 относительно точки  $D$ . Линия действия силы  $\vec{R}_{43}^n$  проходит через точку  $D$ , поэтому она не имеет плеча и ее момент относительно точки  $D$  равен нулю.







$a$  – заданный механизм;  $b$  – план скоростей механизма;  $в$  – план ускорений механизма;  $г$  – схема приложенных к механизму сил;  $д$  – схема сил диады 4-5;  $е$  – план сил диады 4-5;  $ж$  – схема сил диады 2-3;  $з$  – план сил диады 2-3;  $и$  – схема сил механизма первого класса;  $к$  – план сил механизма первого класса

Рисунок 13 – Применение метода планов сил

Момент создает сила  $\vec{R}_{43}^{\tau}$  на плече  $L_{CD}$ , поскольку  $L_{CD}$  является перпендикуляром, опущенным из точки  $D$  на линию действия силы. Причем момент положительный потому, что сила стремится повернуть звено 4 относительно точки  $D$  против часовой стрелки, тогда уравнения равновесия моментов  $\sum M_D(4) = 0$ ,  $R_{43}^{\tau} \cdot L_{CD} = 0$ ,  $R_{43}^{\tau} = 0$ . Теперь в уравнении равновесия две неизвестные. Можно приступить к его графическому решению. Строить векторный многоугольник можно в любой последовательности, начиная с известных по направлению и модулю векторов. Отложим  $Q = 250$  Н, по ее направлению вектор длиной  $|Q| = 50$  мм и определим масштабный коэффициент построения:  $\mu_F = \frac{Q}{|Q|} = \frac{250}{50} = 5 \frac{\text{Н}}{\text{мм}}$ . Определим  $|U_5| = U_5/\mu_F = 146,5/5 = 29,3 \approx 29$  мм, и  $|G_5| = G_5/\mu_F = 245,25/5 = 49,05 \approx 49$  мм. Пристроим их последовательно к вектору  $\vec{Q}$  (рисунок 13, *e*). Далее к концу вектора  $G_5$  пристроим линию действия реакции  $R_{43}^n$ , а из точки начала построения вектора  $Q$  – линию действия  $R_{50}$  до точки пересечения с линией реакции  $R_{43}^n$ . Поставим направление векторов  $R_{43}^n$  и  $R_{50}$  так, чтобы получился замкнутый векторный контур. Вектор  $R_{43}^n$  на схеме сил (рисунок 13, *d*) имеет противоположное направление тому, что получилось из построения.

Следует понимать, что истинное направление векторов получается при графическом решении векторных уравнений на планах сил. Но менять направление на схемах сил не стоит, иначе расчеты моментов окажутся неверными. Замеряем полученные вектора на плане  $|R_{43}^n| = 80,5$  мм,  $|R_{50}| = 36$  мм. Определяем значения реакций:  $R_{43}^n = |R_{43}^n| \cdot \mu_F = 80,5 \cdot 5 = 402,5$  Н,  $R_{50} = |R_{50}| \cdot \mu_F = 36 \cdot 5 = 180$  Н. Поскольку  $R_{43}^{\tau} = 0$ , то реакция  $\vec{R}_{43} = \vec{R}_{43}^n + \vec{R}_{43}^{\tau} = \vec{R}_{43}^n = 402,5$  Н.

Реакция  $\vec{R}_{45}$  во внутренней вращательной кинематической паре  $D$  определяется из условий равновесия звена 4:  $\sum F(4) = 0$ ,  $\vec{R}_{45} + \vec{R}_{43} = 0$ ,  $\vec{R}_{45} = -\vec{R}_{43}$ . Рассмотрим диаду 2-3 (рисунок 13, *ж*). Отбрасываем связи и заменяем их действие реакциями: в точке  $C$  реакция  $\vec{R}_{34} = -\vec{R}_{34} = -402,5$  Н (направлена противоположно  $\vec{R}_{43}$ ); в точке  $B$  реакция  $\vec{R}_{30}$  (неизвестного направления, поэтому на схеме направим произвольно); в точке  $A$  реакция  $\vec{R}_{21}$  (перпендикулярно кулисе 3). Записываем уравнение равновесия диады в виде суммы всех сил, на нее действующих:

$$\underline{\underline{\vec{R}_{34}}} + \underline{\underline{\vec{G}_3}} + \underline{\underline{\vec{U}_3}} + \underline{\underline{\vec{R}_{21}}} + \underline{\underline{\vec{R}_{30}}} = 0.$$

Снова имеем три неизвестные: модуль и направление реакции  $\vec{R}_{30}$  и модуль реакции  $\vec{R}_{21}$ . Необходимо одну из них определить. Для этого составим уравнение равновесия моментов сил диады относительно точки  $B$ :



$$\sum M_B = 0; \quad R_{34} \cdot h_R + U_3 \cdot h_U + G_3 \cdot h_G - R_{21} \cdot L_{AB} = 0;$$

$$R_{21} = \frac{R_{34} \cdot h_R + U_3 \cdot h_U + G_3 \cdot h_G}{L_{AB}} = \frac{402,5 \cdot 55,2 + 31,92 \cdot 311 + 78,48 \cdot 100}{392} = 611,99 \text{ Н},$$

где  $h_R$ ,  $h_U$ ,  $h_G$  – плечи (перпендикуляры, опущенные из точки  $B$  на линии действия сил) сил  $R_{34}$ ,  $U_3$ ,  $G_3$  соответственно, значения подставляются в миллиметрах, измеряются на схеме сил. Реакция получилась положительной, значит, выбрано верное направление вектора  $\vec{R}_{21}$  на схеме.

Теперь в уравнении равновесия две неизвестные. Можно приступить к его графическому решению. Начнем построение с известных сил. Реакция  $\vec{R}_{34}$  уже определена при рассмотрении диады 4-5 (см. рисунок 13, *e*) и по третьему закону Ньютона равна  $\vec{R}_{43}$ , но противоположно направлена. Далее определим в выбранном масштабе длины в миллиметрах остальных известных векторов и построим их последовательно к вектору  $\vec{R}_{34}$  (рисунок 13, *з*):  $|G_3| = G_3/\mu_F = 78,48/5 = 15,696 \approx 16 \text{ мм}$ ,  $|U_3| = U_3/\mu_F = 31,92/5 = 6,384 \approx 6 \text{ мм}$ .

К вектору  $U_3$  построим определенную ранее реакцию  $R_{21}$ . Замыкающий вектор многоугольника сил является искомым вектором  $R_{30}$ . Замеряем его длину  $|R_{30}| = 32,6 \text{ мм}$ . Определяем реакцию  $R_{30} = |R_{30}| \cdot \mu_F = 32,6 \cdot 5 = 163 \text{ Н}$ .

Реакция  $\vec{R}_{23}$  во внутренней кинематической паре  $A'$  определяется из условий равновесия звена 2:  $\sum F(2) = 0$ ,  $\vec{R}_{21} + \vec{R}_{23} = 0$ ,  $\vec{R}_{23} = -\vec{R}_{21}$ .

Силовой расчет механизма первого класса (рисунок 13, *u*) заключается в определении уравновешивающей силы  $F_{yp}$  и реакции в кинематической паре  $O$ . Отбрасываем связи и заменяем их действие реакциями: в точке  $A$  – реакция  $\vec{R}_{12} = -\vec{R}_{21} = -618,39 \text{ Н}$  (направлена противоположно  $\vec{R}_{21}$ ); в точке  $O$  – реакция  $\vec{R}_{10}$  (неизвестного направления, поэтому на схеме направим произвольно). Уравнение равновесия кривошипа

$$\underline{\vec{R}_{12}} + \underline{\vec{F}_{yp}} + \vec{R}_{10} = 0.$$

Снова имеем три неизвестные: модуль и направление реакции  $\vec{R}_{10}$  и модуль реакции  $\vec{F}_{yp}$ . Составим уравнение равновесия моментов сил кривошипа относительно точки  $O$ :

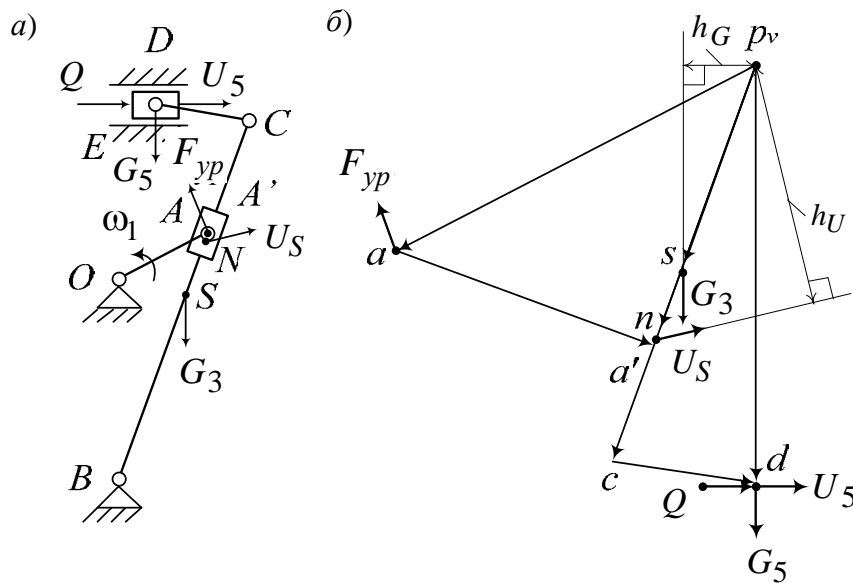
$$\sum M_O = 0; \quad R_{12} \cdot h - F_{yp} \cdot L_{OA} = 0; \quad F_{yp} = \frac{R_{12} \cdot h}{L_{OA}} = \frac{611,99 \cdot 11,3}{15} = 461,03 \text{ Н}.$$

Теперь в уравнении равновесия кривошипа две неизвестные. Можно при-



ступать к его графическому решению (рисунок 13, *к*). Реакция  $\vec{R}_{12}$  уже определена при рассмотрении диады 2-3 (см. рисунок 13, *з*) и по третьему закону Ньютона равна  $\vec{R}_{21}$ , но противоположно направлена. К вектору  $R_{12}$  пристроим определенную ранее силу  $F_{yp}$ . Замыкающий вектор многоугольника сил является искомым вектором  $R_{10}$ . Замеряем его длину  $|R_{10}| = 94,6$  мм. Определяем реакцию  $R_{30} = |R_{30}| \cdot \mu_F = 94,6 \cdot 5 = 473$  Н.

Определим теперь уравновешивающую силу с помощью рычага Жуковского (рисунок 14). Для этого построим повернутый в любом направлении на  $90^\circ$  план скоростей (см. рисунок 14, *б*) и перенесем на него со схемы сил механизма (см. рисунок 14, *а*) все силы в соответствующие точки.



*a* – схема приложенных к механизму сил; *б* – рычаг Жуковского

Рисунок 14 – Применение метода рычага Жуковского

Считая, что план скоростей – это жесткий рычаг с опорой в полюсе, запишем уравнение моментов всех сил относительно полюса. Плечи будем подставлять в миллиметрах, измеряя их непосредственно на рисунке 14, *б*.

$$\sum M_{p_v} = 0; \quad F_{yp} \cdot p_v a - G_3 \cdot h_G - U_3 \cdot h_U - (Q + U_5) \cdot p_v d = 0.$$

Линия действия силы  $G_5$  проходит через полюс, поэтому она не имеет плеча и ее момент относительно полюса равен нулю. Определим уравновешивающую силу:

$$F_{yp} = \frac{G_3 \cdot h_G + U_3 \cdot h_U + (Q + U_5) \cdot p_v d}{p_v a};$$

$$F_{yp} = \frac{78,48 \cdot 28 + 31,92 \cdot 92 + (250 + 146,5) \cdot 155,2}{150} = 444,47 \text{ Н.}$$

Определяем расхождение результатов, полученных разными методами:

$$\Delta = 100 - \frac{444,47 \cdot 100}{461,03} = 3,59 \%$$

**Практические занятия № 8–12. Определение геометрических параметров зубчатого колеса. Кинематический анализ рядового зубчатого механизма. Аналитический метод кинематического исследования планетарного механизма. Графический метод кинематического исследования планетарного механизма. Синтез планетарного механизма**

### *Теоретические основы практических занятий*

Зубчатые механизмы служат для передачи вращения. В машиностроении чаще используются зубчатые механизмы, понижающие угловую скорость  $\omega$ ,  $\text{с}^{-1}$ , и увеличивающие вращающий момент  $T$ , Н·м, т. е. усилие. Такие передачи называют **редукторами**. Их необходимость обусловлена тем, что выпускаемые промышленностью двигатели быстроходны. Рабочие же органы, как правило, тихоходны и требуют больших усилий для выполнения работы. Но бывают зубчатые механизмы, которые увеличивают угловую скорость, – **мультипликаторы**. Они могут использоваться, например, для центрифуг.

**Передаточное отношение**  $i$  – отношение угловой скорости  $\omega_1$ ,  $\text{с}^{-1}$ , ведущего зубчатого колеса к угловой скорости ведомого  $\omega_2$  с учетом направления вращения (это справедливо и для частот вращения  $n_1$  и  $n_2$ , об/мин), индексы в формуле указывают на номера колес:

$$i_{12} = \pm \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{n_1}{n_2}.$$

Знак «плюс» используют при внутреннем зацеплении, а «минус» – при внешнем (рисунок 15, а, б). Передаточное отношение не следует путать с **передаточным числом**  $u$ , под которым понимают отношение числа зубьев большего колеса  $z_2$  к меньшему  $z_1$ :  $u_{12} = \pm \frac{z_2}{z_1}$ .

Передаточное отношение всегда больше единицы и знака не имеет. Часто передаточное отношение определяют через число зубьев.

**Зубчатым рядом** называют зубчатый механизм, образованный зубчатыми колесами с неподвижными осями. Зубчатый ряд может состоять из одной или нескольких передач (рисунок 15, в).

Если зубчатый ряд имеет несколько зацеплений, то его передаточное отношение будет равно произведению передаточных отношений каждого зацепле-



ния. Например (см. рисунок 15, в), для зубчатого ряда от колеса 1 к колесу 7 передаточное отношение  $i_{17} = i_{12}i_{34}i_{56}i_{67} = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \left(\frac{z_4}{z_3}\right) \cdot \left(-\frac{z_6}{z_5}\right) \cdot \left(-\frac{z_7}{z_6}\right) = -\frac{z_2 z_4 z_7}{z_1 z_3 z_5}$ .

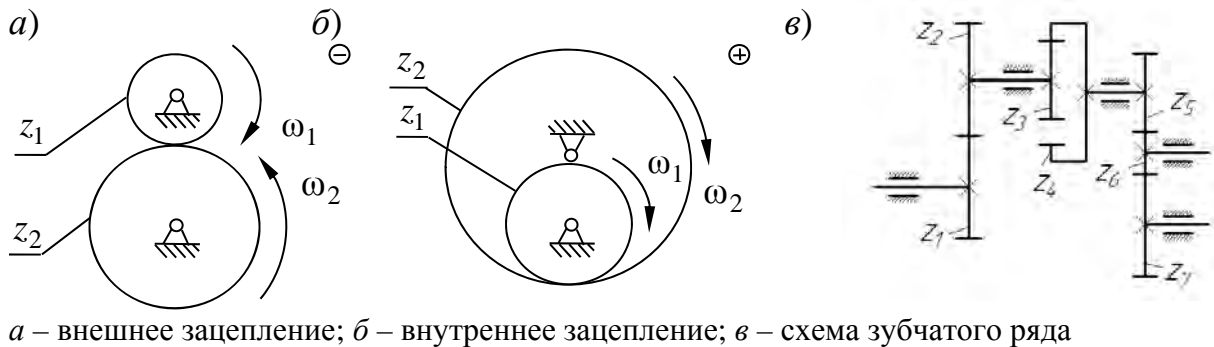


Рисунок 15 – Зубчатый ряд

**Планетарным** называется зубчатый механизм, содержащий колеса с подвижными осями. Звенья планетарного механизма имеют особенные названия. Зубчатые колеса с подвижной осью ( $z_{g1}$  и  $z_{g2}$  в таблице 9) называются **сателлитами**. Подвижное звено, в котором помещена ось сателлита, называется **водителем**  $h$ . В планетарной передаче есть два центральных колеса: **центральное**  $z_a$  с внешними зубьями называется **солнечным**,  $z_a$  с внутренними зубьями – **эпициклом** (корона), неподвижное  $z_b$  – **опорным**.

При определении передаточного отношения планетарных передач используется **метод обращенного движения** (метод остановки водила) [2].

Рассмотрим данный метод применительно к планетарной передаче типа В, показанной в таблице 9. Передаточное отношение для данной передачи при передаче движения от солнечного колеса  $a$  к водилу  $h$  при остановленном коронном колесе  $b$  определяется по выражению

$$i_{ah}^b = \frac{\omega_a}{\omega_h}.$$

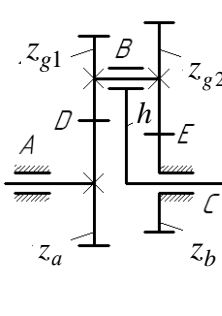
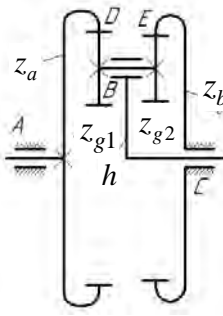
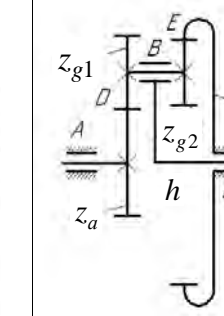
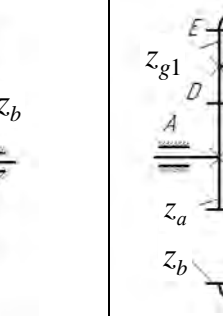
По методу Виллиса сообщаем всему механизму угловую скорость, равную угловой скорости водила, но направленную в противоположном направлении. При этом получаем обращенный механизм, в котором движение передается от солнечного колеса  $a$  к коронному колесу  $b$  при остановленном водиле  $h$ . Передаточное отношение обращенного механизма определяется по выражению

$$i_{ab}^h = \frac{\omega_a - \omega_h}{\omega_b - \omega_h}.$$

В рассматриваемом механизме (см. рисунок 16, а) угловая скорость коронного колеса  $\omega_b = 0$ , следовательно,  $i_{ab}^h = \frac{\omega_a - \omega_h}{-\omega_h} = \frac{\omega_a}{-\omega_h} + \frac{-\omega_h}{-\omega_h} = 1 - \frac{\omega_a}{\omega_h} = 1 - i_{ah}^b$ .

$$i_{ab}^h = 1 - i_{ah}^b \text{ или } i_{ah}^b = 1 - i_{ab}^h.$$

Таблица 9 – Основные типы планетарных механизмов

Схема				
Название	Механизмы с двухвенцовыми сателлитами и одноименными зацеплениями (два внешних)	Механизмы с двухвенцовыми сателлитами и одноименными зацеплениями (два внутренних)	Механизм с двухвенцовыми и разноименными зацеплениями	Механизм с одновенцовыми сателлитами и разноименными зацеплениями
Значение $i_{ab}^h$	$\frac{z_{g1} z_b}{z_a z_{g2}}$	$\frac{z_{g1} z_b}{z_a z_{g2}}$	$-\frac{z_{g1} z_b}{z_a z_{g2}}$	$-\frac{z_b}{z_a}$
Диапазон $i_{ab}^h$	1...2	1...2	-10...-1	-5...1,4
Условие соосности	$z_a + z_g = z_b + z_f$	$z_a - z_g = z_b - z_f$	$z_a + z_g = z_b - z_f$	$z_b = z_a + 2z_g$
Условие сборки	$(z_b z_g - z_a z_f) / k_c = n$		$(z_b z_g + z_a z_f) / k_c = n$	$(z_a + z_b) / k_c = n$
Примечание – $i_{ab}^h$ – передаточное отношение обращенного механизма; $k_c$ – число сателлитов; $n$ – любое целое число				

**Обращённый механизм** представляет собой зубчатый ряд, в котором движение передаётся от солнечного колеса  $z_a$  к колесу  $z_{g1}$  и через колесо  $z_{g2}$  колесу  $z_b$ . Пример такого механизма приведен на рисунке 16, б. Следовательно, передаточное отношение обращённого механизма  $i_{ab}^h$  при известных числах зубьев всех звеньев планетарной передачи будет определяться выражением

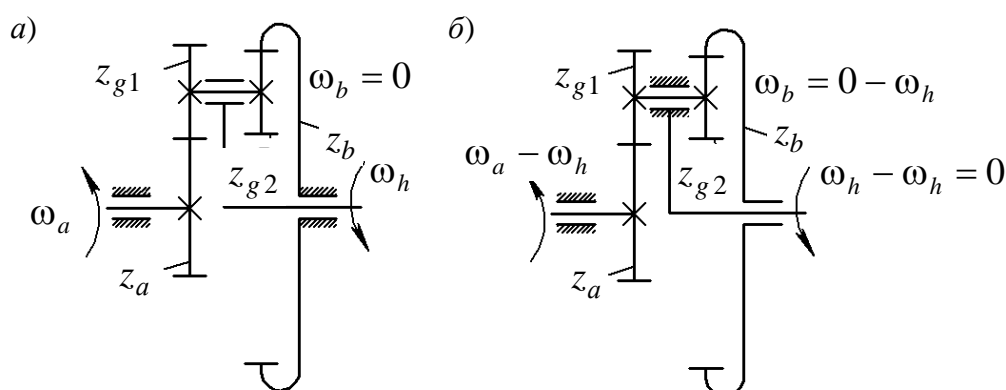
$$i_{ab}^h = \left( -\frac{z_{g1}}{z_a} \right) \cdot \frac{z_b}{z_{g2}}.$$

Окончательно получим передаточное отношение  $i_{ah}^b = 1 - i_{ab}^h = 1 + \frac{z_{g1} z_b}{z_a z_{g2}}$ .

**Задача синтеза** планетарного механизма заключается в назначении чисел зубьев зубчатых колес с учетом условий обеспечения требуемого передаточного отношения, соосности, сборки и соседства (см. таблицу 9), отсутствия подрезания и заклинивания.

**Условие соосности** обеспечивает совпадение осей вращения центральных

зубчатых колес и водила, иначе механизм заклинит. **Условие соседства** сателлитов выражается в том, что соседние сателлиты не должны касаться друг друга окружностями вершин. **Условие сборки** заключается в том, что при сборке после установки первого сателлита может оказаться, что остальные сателлиты установить нельзя. Это происходит потому, что поставленный первым сателлит полностью определяет взаимное положение центральных колес. **Условие отсутствия подрезания** колес с внешними зубьями обеспечивается, если для всех колес с внешними зубьями выполняется неравенство  $z_i \geq z_{\min} = 17$ . **Условие отсутствия заклинивания во внутреннем зацеплении** для передачи, состоящей из колес без смещения, можно обеспечить при выполнении следующих неравенств:  $z_{\text{внешн}} \geq 20$ ,  $z_{\text{внутр}} \geq 85$ ,  $z_{\text{внутр}} - z_{\text{внешн}} \geq 8$ .



*a* – планетарный механизм; *б* – обращённый механизм

Рисунок 16 – Кинематический анализ планетарного механизма

В ряде случаев полезно провести кинематическое исследование планетарного механизма графическим методом. В основе этого метода лежат два положения кинематики: скорость точки звена, совершающего вращательное движение, является линейной функцией радиуса вращения (в таком случае график зависимости скорости от радиуса колеса есть прямая линия); любое плоское движение можно рассматривать как мгновенное вращательное вокруг мгновенного центра скоростей.

В качестве примера рассмотрим механизм, представленный на рисунке 17, *a*. Известны числа зубьев колес:  $z_1 = 112$ ;  $z_2 = 40$ ;  $z_3 = 18$ ;  $z_4 = 90$ ;  $z_5 = 8$ ;  $z_6 = 26$ ;  $m = 3$  мм;  $n_{\text{дв}} = n_h = 1800$  мин<sup>-1</sup>.

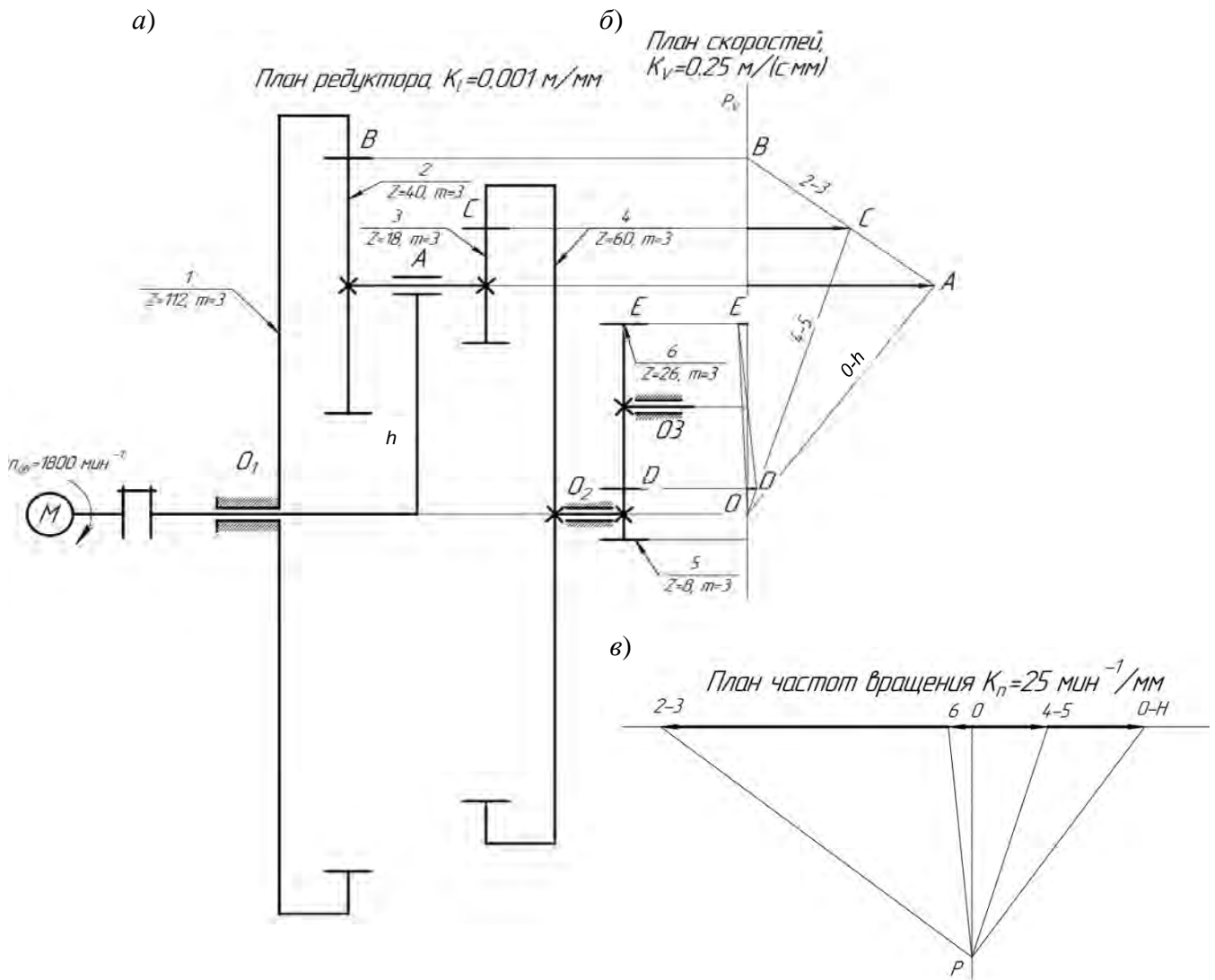
Определяем диаметры зубчатых колес:

$$\begin{aligned} d_1 &= mz_1 = 3 \cdot 112 = 336 \text{ мм}; & d_2 &= mz_2 = 3 \cdot 40 = 120 \text{ мм}; \\ d_3 &= mz_3 = 3 \cdot 18 = 54 \text{ мм}; & d_4 &= mz_4 = 3 \cdot 90 = 270 \text{ мм}; \\ d_5 &= mz_5 = 3 \cdot 8 = 24 \text{ мм}; & d_6 &= mz_6 = 3 \cdot 26 = 78 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Выбираем масштабный коэффициент построения плана скоростей редуктора:

$$K_V = \frac{V_A}{P_a} = \frac{31,65}{63,30} = 0,5 \frac{\text{м/с}}{\text{мм}}.$$





а – кинематическая схема механизма; б – план скоростей механизма; в – план частот вращения зубчатых колес механизма

Рисунок 17 – Графический метод кинематического анализа

Вычерчиваем кинематическую схему механизма в масштабе  $K_l = 0,002$  м/мм и определяем скорость точки А.

$$V_A = \frac{\pi \cdot n_{дв}}{30} \cdot \frac{d_1}{2} = \frac{3,14 \cdot 1800}{30} \cdot \frac{0,336}{2} = 31,65 \text{ м/с}.$$

Для построения плана скоростей (см. рисунок 17, б) проведем вертикальную прямую полюса Р-Р и откладываем от нее по горизонтали значение скорости точки А, равное  $P_a = 63$  мм. Соединив точку а с центром вращения О, получим линию распределения скоростей водила h. Точка В на механизме является мгновенным центром скоростей колес 2 и 3 и будет находиться на линии полюсов Р-Р. Соединив точки а и б, получим линию распределения скоростей

для сателлита, т. е. для колес  $z_2$  и  $z_3$ . Скорость точки  $C$ , принадлежащей колесу 3 сателлита, определим, снеся эту точку на линию распределения скоростей 2-3. Так как точка  $c$  принадлежит также колесу  $z_4$ , то можно построить линию распределения скоростей колес 4 и 5.

Скорость точки  $D$  найдем, спроецировав ее на линию распределения скоростей 4-5. Соединив точку  $a$  с центром вращения колеса  $b$ , найдем линию распределения скоростей шестого колеса.

Для построения плана частот вращения всех колес (см. рисунок 19, в) проведем горизонталь и точку  $O$ , восстановим перпендикуляр. От точки  $O$  по горизонтали отложим значение частоты вращения двигателя  $n_{\text{дв}}$  равное  $P_a = 90$  мм, в масштабе  $K_n = 20 \text{ мин}^{-1} \text{ мм}$  и проведем из точки  $a$  линию, параллельную линии распределения скоростей водила  $h$ , и на пересечении  $c$  получаем полюс построения  $P$ . Из полюса проводим линии, параллельные линиям распределения скоростей каждого из колес, которые будут отсекать на горизонтали отрезки 0-2, 0-5, 0-6, выражающие в миллиметрах значения частот вращения каждого колеса. Из рисунка 19, в найдем значения частот вращения колес:

$$n_2 = n_3 = (0 - 3) \cdot K_n = 162 \cdot 20 = 3240 \text{ мин}^{-1};$$

$$n_4 = n_5 = (0 - 4) \cdot K_n = 41,5 \cdot 20 = 83 \text{ мин}^{-1};$$

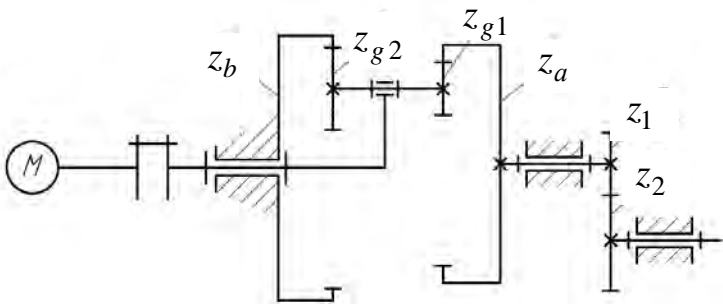
$$n_6 = (0 - 6) \cdot K_n = 26 \cdot 20 = 520 \text{ мин}^{-1}.$$

Геометрические параметры зубчатых колес и пример их определения приведены в [4, с. 4].

### Задания для самостоятельного выполнения.

По варианту, заданному преподавателем, произвести синтез планетарной части смешанного зубчатого механизма (таблица 10). Определить угловые скорости каждого зубчатого колеса и водила графически и аналитически.

Таблица 10 – Схемы для синтеза планетарных механизмов

Схема	Исходные данные	
	Вариант 1.А	Вариант 1.Б
	$i_{h2}^b = 5,4;$ $z_1 = 18;$ $z_2 = 45;$ $n_{\text{дв}} = 750 \text{ мин}^{-1}$	$i_{h2}^b = 7,7;$ $z_1 = 20;$ $z_2 = 56;$ $n_{\text{дв}} = 980 \text{ мин}^{-1}$

## Продолжение таблицы 10

Схема	Исходные данные	
	Вариант 2.А	Вариант 2.Б
	$i_{a2}^b = -7;$ $z_1 = 25;$ $z_2 = 45;$ $n_{\partial\partial} = 750 \text{ мин}^{-1}$	$i_{a2}^b = -8;$ $z_1 = 20;$ $z_2 = 24;$ $n_{\partial\partial} = 980 \text{ мин}^{-1}$
	$i_{a2}^b = 0,6;$ $z_1 = 20;$ $z_2 = 17;$ $n_{\partial\partial} = 750 \text{ мин}^{-1}$	$i_{a2}^b = 0,5;$ $z_1 = 23;$ $z_2 = 20;$ $n_{\partial\partial} = 980 \text{ мин}^{-1}$
	$i_{a2}^b = -6;$ $z_1 = 20;$ $z_2 = 34;$ $n_{\partial\partial} = 750 \text{ мин}^{-1}$	$i_{a2}^b = -7,2;$ $z_1 = 17;$ $z_2 = 34;$ $n_{\partial\partial} = 980 \text{ мин}^{-1}$
	$i_{a2}^b = -2,25;$ $z_1 = 18;$ $z_2 = 27;$ $n_{\partial\partial} = 750 \text{ мин}^{-1}$	$i_{a2}^b = -2,85;$ $z_1 = 15;$ $z_2 = 39;$ $n_{\partial\partial} = 980 \text{ мин}^{-1}$

## Окончание таблицы 10

Схема	Исходные данные	
	Вариант 6.А	Вариант 6.Б
	$i_{h2}^b = 8;$ $z_1 = 20;$ $z_2 = 52;$ $n_{\partial\partial} = 750 \text{ мин}^{-1}$	$i_{h2}^b = 9;$ $z_1 = 17;$ $z_2 = 51;$ $n_{\partial\partial} = 980 \text{ мин}^{-1}$
	$i_{h2}^b = 6;$ $z_1 = 20;$ $z_2 = 52;$ $n_{\partial\partial} = 750 \text{ мин}^{-1}$	$i_{h2}^b = 10;$ $z_1 = 20;$ $z_2 = 62;$ $n_{\partial\partial} = 980 \text{ мин}^{-1}$
	$i_{a2}^b = 11,8;$ $z_1 = 17;$ $z_2 = 53;$ $n_{\partial\partial} = 750 \text{ мин}^{-1}$	$i_{a2}^b = 12,3;$ $z_1 = 18;$ $z_2 = 63;$ $n_{\partial\partial} = 980 \text{ мин}^{-1}$
	$i_{a2}^b = -13;$ $z_1 = 17;$ $z_2 = 34;$ $n_{\partial\partial} = 750 \text{ мин}^{-1}$	$i_{a2}^b = -9,8;$ $z_1 = 19;$ $z_2 = 27;$ $n_{\partial\partial} = 980 \text{ мин}^{-1}$
	$i_{a2}^b = 0,27;$ $z_1 = 27;$ $z_2 = 18;$ $n_{\partial\partial} = 750 \text{ мин}^{-1}$	$i_{a2}^b = 0,22;$ $z_1 = 39;$ $z_2 = 19;$ $n_{\partial\partial} = 980 \text{ мин}^{-1}$

**Пример выполнения задачи синтеза**

На рисунке 18 приведена схема исследуемого механизма. Исходные данные:  $i_{h2}^b = 5,5$  – передаточное отношение от водила  $h$  к выходному колесу  $z_2$  при остановленном колесе  $z_b$ ;  $z_1 = 18$ ,  $z_2 = 45$  – число зубьев колес зубчатого ряда;

$n_{об} = 750 \text{ мин}^{-1}$  – частота вращения двигателя, обозначенного  $M$  на схеме.

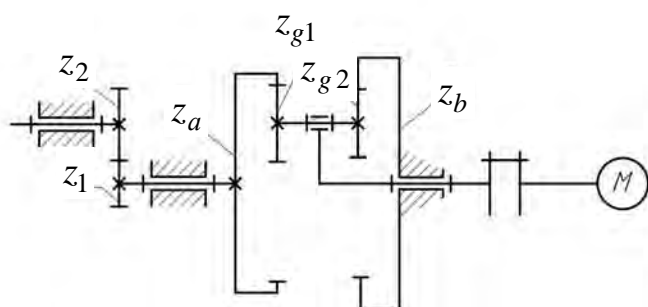


Рисунок 18 – Схема зубчатого механизма

Зубчатый механизм состоит из планетарного механизма, передающего вращение от водила  $h$  к зубчатому колесу  $z_a$ , и зубчатого ряда  $z_1 - z_2$ . Передаточное отношение такого механизма равно произведению передаточных отношений планетарного механизма и зубчатого ряда:  $i_{h2}^b = i_{ha}^b \cdot i_{12}$ .

Известно передаточное отношение

зубчатого ряда  $i_{12} = -\frac{z_2}{z_1} = -\frac{45}{18} = -2,5$ . Определим передаточное число

планетарного механизма  $i_{ha}^b = \frac{i_{h2}^b}{i_{12}} = \frac{5,5}{-2,5} = -2,2$ .

Для обеспечения условия требуемого передаточного отношения выразим передаточное число планетарного механизма через число зубьев. Для этого сначала определим передаточное отношение планетарного механизма от колеса  $z_a$

к водилу  $h$  при остановленном колесе  $z_b$ :  $i_{ah}^b = \frac{1}{i_{ha}^b} = \frac{1}{-2,2} = -0,45$ .

Передаточное отношение обращенного механизма (при остановленном водиле  $h$ )  $i_{ab}^h = 1 - i_{ah}^b = 1 - (-0,45) = 1 + 0,45 = 1,45$ .

Передаточное отношение обращенного механизма выразим через число зубьев:  $i_{ab}^h = \frac{z_{g1}z_b}{z_a z_{g2}}$ , т. е.  $1,45 = \frac{z_{g1}z_b}{z_a z_{g2}}$ .

Теперь известно, какое должно быть соотношение числа зубьев. Представим десятичную дробь простой и сократим ее. Распределим с помощью сомножителей это соотношение, учитывая, что центральные зубчатые колеса с внутренними зубьями  $z_a$  и  $z_b$  всегда имеют большее число зубьев, чем сателлиты

$$z_{g1} \text{ и } z_{g2}: 1,45 = \frac{145}{100} = \frac{29}{20} = \frac{1 \cdot 29}{10 \cdot 2} = \frac{z_{g1}z_b}{z_a z_{g2}}.$$

Из соотношения видно, что для обеспечения заданного передаточного отношения с высокой точностью колесо  $z_b$  должно быть в 29 раз больше сателлита  $z_g$ . Для уменьшения габаритов механизма, а значит, снижения материалоемкости допускается 3...5-процентные погрешности при обеспечении заданного передаточного отношения. Поэтому округлим до десятых 1,45. Получим

$$1,5 = \frac{15}{10} = \frac{3}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 1} = \frac{z_{g1}z_b}{z_a z_{g2}}.$$

Условие соосности

$$(z_a - z_{g1}) = (z_b - z_{g2});$$

$$2 \cdot (2-1) = 1 \cdot (3-1);$$

$$(4-2) = (3-1).$$

Умножим обе части равенства на 20 – минимальное число зубьев, которое можно нарезать для внешнего колеса при внутреннем зацеплении (условие отсутствия заклинивания во внутреннем зацеплении):

$$20 \cdot (4-2) = (3-1) \cdot 20;$$

$$(80-40) = (60-20).$$

Получилось, что число зубьев колес с внутренними зубьями меньше 85, значит, необходимо умножать не на 20, а на 29:

$$29 \cdot (4-2) = (3-1) \cdot 29;$$

$$(116-58) = (87-29).$$

В результате синтезирован зубчатый планетарный механизм со следующим числом зубьев:  $z_a = 116$ ,  $z_b = 87$ ,  $z_{g1} = 58$ ,  $z_{g2} = 29$ .

Зная частоту вращения двигателя и передаточное отношение механизма, можно определить частоту вращения выходного вала зубчатого механизма:

$$n_2 = \frac{n_{\text{дв}}}{i_{h2}^b} = \frac{750}{5,5} = 136,36 \text{ об/мин.}$$

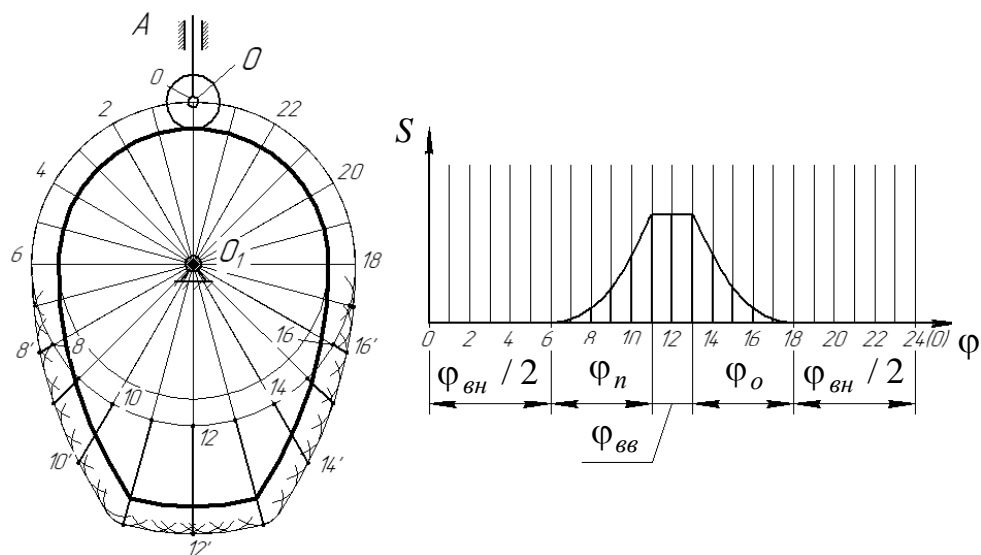
## Практические занятия № 13–15. Графический метод анализа кулачковых механизмов с толкателем. Графический метод анализа кулачковых механизмов с коромыслом. Синтез кулачковых механизмов

### *Теоретические основы практических занятий*

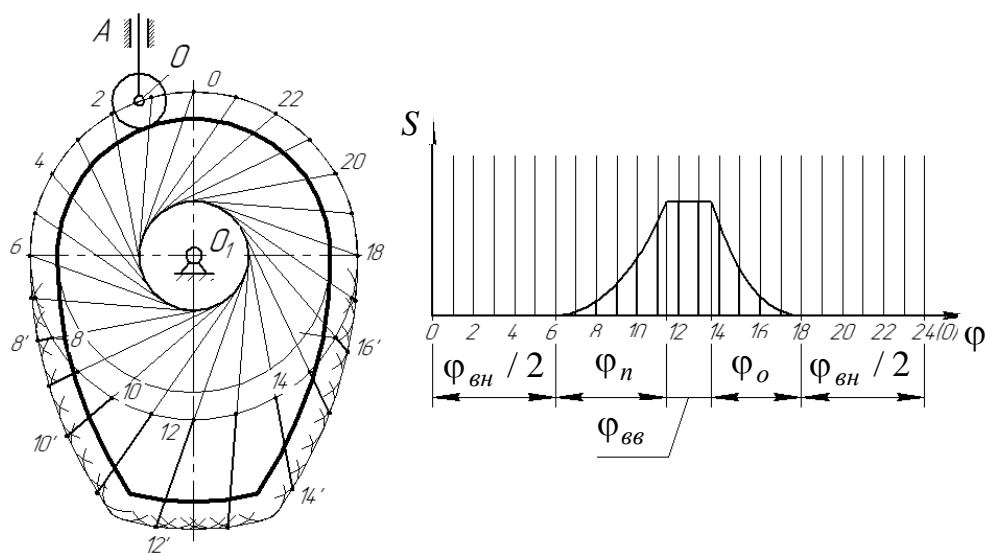
**Кулачковым механизмом** называется механизм, в состав которого входит **кулачок** – звено, имеющее элемент высшей пары, выполненное в виде поверхности переменной кривизны (рисунки 19 и 20). Кулачковый механизм может состоять из: входного звена – кулачка, совершающего вращательное движение; выходного звена – толкателя (при поступательном его движении) или колебателя (при вращательном). Между входным и выходным звеньями может быть **ролик** (см. рисунок 20). Кулачковый механизм называется **центральный**, если ось толкателя проходит через центр вращения кулачка ( $e = 0$ ) (см. рисунок 20, *a*), и **дезаксиальный**, если ось толкателя смещена на дезаксиал  $e$  (см. рисунок 20, *b*).



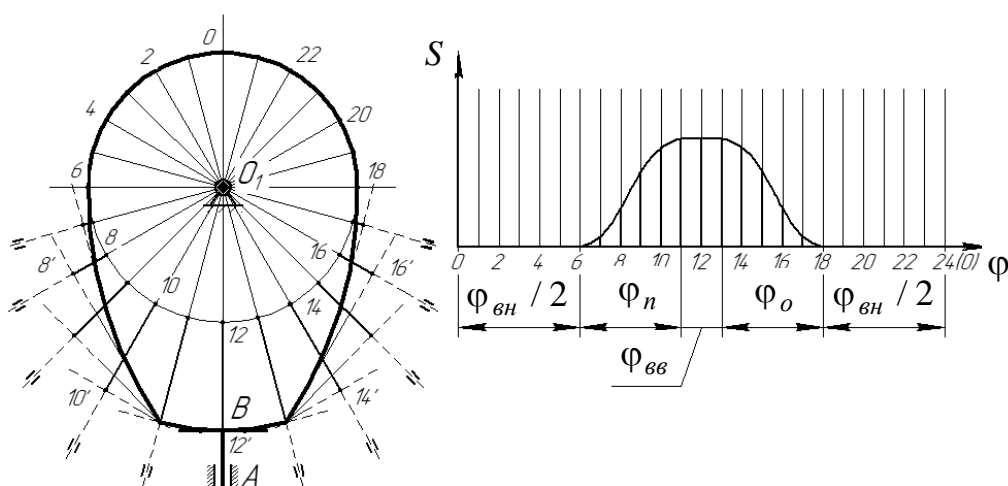
а)



б)

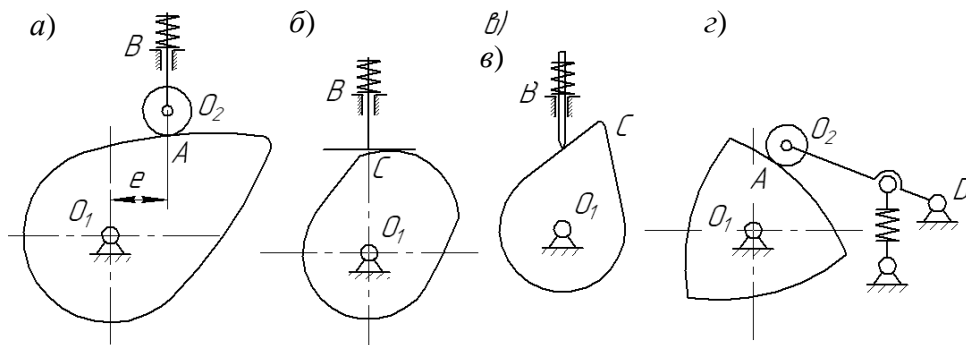


в)



а – дезаксиальный кулачковый механизм с роликовым толкателем; б – центральный кулачковый механизм с роликовым толкателем; в – центральный кулачковый механизм с плоским толкателем

Рисунок 19 – Кинематический анализ кулачковых механизмов



*a* – дезаксиальный кулачковый механизм с роликовым толкателем; *б* – центральный кулачковый механизм с плоским толкателем; *в* – центральный кулачковый механизм с игольчатым толкателем; *г* – кулачковый механизм с роликовым колебателем

Рисунок 20 – Кинематические схемы кулачковых механизмов

Профиль кулачка, которого касается ролик, называется **действительным**. Траектория центра ролика при движении его относительно кулачка называется **центровым профилем**. Центральной и действительный профили кулачка являются эквидистантными кривыми.

Задачей кинематического анализа кулачковых механизмов является **определение закона движения выходного звена**. Для упрощения анализа используют **метод обращенного движения**, который заключается в том, что мысленно всему механизму сообщают вращение вокруг центра вращения кулачка с угловой скоростью, равной, но противоположно направленной угловой скорости кулачка. Кулачок становится неподвижным, а перемещение выходного звена будет таким, как в истинном движении при неподвижной стойке. Примеры выполнения задания для анализа различных кулачковых механизмов приведены на рисунке 20.

Задача синтеза противоположна анализу. Она заключается в построении профиля кулачка, обеспечивающего требуемый закон перемещения выходного звена. Решение этой задачи для различных видов кулачковых механизмов приведено в [4, с. 26].

## Список литературы

- 1 **Борисенко, Л. А.** Теория механизмов, машин и манипуляторов: учебное пособие / Л. А. Борисенко. – Минск: Новое знание, 2011. – 285 с.
- 2 **Волков, В. В.** Теория механизмов и машин: учебник / В. В. Волков. – Старый Оскол: ТНТ, 2017. – 328 с.
- 3 **Молотников, В. Я.** Техническая механика: учебное пособие / В. Я. Молотников. – Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2017. – 476 с.: ил.
- 4 Теория механизмов и машин: методические рекомендации к практическим занятиям для студентов направления подготовки 23.03.02 «Наземные транспортно-технологические комплексы» дневной формы обучения / Сост. В. Л. Комар. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2019. – Ч. 2. – 38 с.